На правах рукописи

Жильцов Александр Владимирович

Оптимизационные алгоритмы с модифицированными функционалами Лагранжа для решения контактных задач механики

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Хабаровск — 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Хабаровский Федеральный исследовательский центр» Дальневосточного отделения Российской академии наук, Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Амурский государственный университет».

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент **Максимова Надежда Николаевна**
Официальные оппоненты:	**ХЛУДНЕВ Александр Михайлович,** доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории краевых задач механики сплошных сред ФГБУН «Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН»
	ЗАЙЦЕВ Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор Высшей школы физико-математических наук Политехнического института ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет»
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт автоматики и процессов управления» Дальневосточного отделения Российской академии наук

Защита состоится 23 мая 2024 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета 24.1.478.02, созданного на базе Хабаровского Федерального исследовательского центра Дальневосточного отделения Российской академии наук, по адресу: 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, д. 54, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ХФИЦ ДВО РАН в обособленном подразделении Вычислительного центра ДВО РАН по адресу: 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65.

Автореферат разослан ________________2024 года.
Телефон для справок: +7 (4212) 32-79-27.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.478.02,
канд. техн. наук, доцент Пассар Андрей Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многие задачи механики сплошных сред формулируются в виде краевых задач для уравнений с частными производными при дополнительных условиях, наложенных на искомое решение. Часть таких задач можно описать с помощью вариационных неравенств, естественным образом приводящих к поиску экстремума функционала энергии на некотором множестве, сформированном ограничениями.

Теория вариационных неравенств и численных методов их решения возникла в 60-х годах XX века. Первой задачей, приводящей к вариационным неравенствам, стала задача Синьорини, поставленная автором в 1933 году. В 1959 году к исследованию задачи приступил Г. Фикера и в 1963 году опубликовал её полный разбор. Чуть позже Г. Стампаккья доказал своё обобщение теоремы Лакса — Мильграма, необходимой для изучения регулярности уравнений с частными производными, и придумал название «вариационное неравенство» для задач подобного рода. Работа Фикеры становится широко известной во Франции, а исследования продолжают Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс и их ученики. В 1972 году выходит книга Дюво и Лионса, в которой множество задач из различных разделов физики формулируется на языке вариационных неравенств. Какие-то предложения в ней даны с подробным обоснованием, для каких-то есть лишь наброски доказательств, какие-то подкреплены ссылками на статьи. В 1976 выходят книги И. Экланда, Р. Темама и Р. Гловинского, Ж.-Л. Лионса, Р. Тремольера. В первой из них вариационные неравенства исследуются с общих позиций, имеется обзор приложений выпуклого анализа в механике, экономике и численном анализе. Во второй дается систематическое изложение численных методов исследования вариационных неравенств. Также уделено внимание теории двойственности, методам релаксации и штрафов. В 1980 году Д. Киндерлерер и Г. Стампаккья издают книгу, в которой сосредоточиваются на теории вариационных неравенств, находящей применение в физике, технике, экономике и других областях знаний.

В 1983 году была опубликована книга И. Главачека и др., в которой акцент сделан на механике деформируемого твердого тела, приводятся численные алгоритмы. В этой книге рассматривается задача, которую мы исследуем в третьей главе диссертации. Вариационные принципы применяются к задачам механики в книгах С. Г. Михлина, В. Л. Бердичевского, Ф. Сьярле, А. С. Кравчука. Развивается это направление в работах Р. В. Намма и его учеников Э. М. Вихтенко, Н. Н. Максимовой (Кушнирук), Г. И. Цоя, в статьях А. М. Хлуднева и его учеников Е. М. Рудого, Н. П. Лазарева, Т. С. Поповой, В. В. Щербакова, Е. В. Вторушина, В. А. Ковтуненко, Л. С. Клабуковой и многих других.

В настоящее время в промышленности широко используются композитные материалы, которые представляют собой комбинацию из двух и более компонентов с существенно различными свойствами. Использование таких материалов позволяет получить большую прочность и жесткость. Но в процессе эксплуатации композитных материалов наполнитель, выполняющий функцию армирования, может отслаиваться от упругой матрицы, что приводит к появлению трещин и других дефектов, ухудшающих целевые характеристики. Для определения предельных нагрузок, предсказания срока службы и поведения композитных материалов необходимо разрабатывать и изучать их модели. В данной работе рассматриваются наиболее простые из нелинейных моделей, описывающих напряженно-деформированное состояние твердых тел. Построение эффективных численных алгоритмов их решения — базис для исследования более сложных реальных задач.

Математические постановки соответствующих прикладных задач существенно зависят от характера моделирования тонкого включения и вида краевых условий на берегах трещин. Классический подход к описанию задач теории трещин приводит к тому, что на берегах трещины задаются краевые условия типа равенств. Современные модели в отличие от классических содержат нелинейные краевые условия. Благодаря таким условиям не допускается взаимное проникновение берегов трещины или двух тел друг в друга. Краевые условия при этом имеют вид системы равенств и неравенств, а задачи относятся к классу задач со свободной границей.

Метод Лагранжа позволяет снять ограничения задачи. Функция Лагранжа зависит от двух групп переменных — прямых (переменные задачи) и двойственных (переменные, отвечающие ограничениям задачи). Однако стандартной схеме присущ ряд недостатков. Во-первых, целевая функция двойственной задачи оказывается в общем случае разрывной, вне зависимости от гладкости функции в исходной задаче. Во-вторых, тоже в общем случае, безусловная оптимизация по прямым переменным при оптимальных значениях двойственных не гарантирует получения оптимального решения исходной задачи.

Теория модифицированных функций Лагранжа (МФЛ) позволяет преодолеть недостатки классического подхода. Пристальное внимание эта теория привлекла после выхода работ, где разработан соответствующий итеративный метод, и статьи, содержащей модификацию функции Лагранжа для задачи с ограничениями типа неравенств. После этого методы решения задач нелинейного программирования, связанные с модифицированными функциями Лагранжа, получили широкое распространение и были всесторонне исследованы, в результате подтверждена их высокая эффективность. Основными монографиями, освещающими данную тему, и на которые опирается диссертационная работа, являются труды Е. Г. Гольштейна и Н. В. Третьякова, К. Гроссмана и А. А. Каплана, Д. Бертсекаса, Б. Т. Поляка. В них теория МФЛ излагается для конечномерных задач выпуклого программирования.

В настоящее время популярным становится применение схем двойственности для решения вариационных неравенств. Функционал Лагранжа в этом случае строится для задачи условной минимизации функционала потенциальной энергии. Такой подход можно наблюдать в работах Р. В. Намма, И. В. Коннова и др.

Численное исследование рассматриваемых в работе задач проводится с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Изначально он был создан для решения краевых задач в теории упругости и оказался гораздо эффективнее метода конечных разностей. Этот метод позволяет учитывать геометрические особенности областей (при этом ЭВМ используется не только для решения системы уравнений, но в первую очередь для формулировки и построения дискретных аппроксимаций). С математической точки зрения МКЭ является обобщением метода Рэлея — Ритца — Галёркина. Систематическое изложение теории МКЭ можно найти в монографиях Д. Одена, Г. Стренга, Р. Галлагера.

При аппроксимации рассматриваемых в работе задач получается квадратичная функция, для минимизации которой (по прямым переменным) можно применять хорошо известные численные методы типа градиентного спуска, поточечной релаксации, метода Ньютона. Однако матрица вторых производных этой функции может оказаться вырожденной, а в таком случае при минимизации возникают проблемы со сходимостью численных алгоритмов. Для преодоления этой сложности в работе используется вспомогательный приём — итеративная проксимальная регуляризация минимизируемой функции. Регуляризация может быть использована и в случаях, когда неточно задана целевая функция, либо допустимое множество.

Целью работы является обоснование применимости теории модифицированных функционалов Лагранжа и построение на их основе оптимизационных алгоритмов для решения задач теории упругости со свободной границей (модельная задача с трещиной, полукоэрцитивная задача контакта двух тел, задача о теле с дефектом с параметром разрушения).

Для достижения поставленной цели необходимо было решить **задачи**:

1. Обосновать справедливость применения теории модифицированных функционалов Лагранжа к задачам выпуклого программирования в случае, когда целевая функция является выпуклой, но не сильно выпуклой.
2. Построить и обосновать схему двойственности, основанную на модифицированном функционале Лагранжа, для решения модельной задачи теории упругости с трещиной. Исследовать свойства функционала чувствительности и свойства модифицированного функционала Лагранжа для поставленной задачи.
3. Построить и обосновать устойчивый метод, основанный на схеме двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа и итеративной проксимальной регуляризации, для решения полукоэрцитивной контактной задачи для двух упругих тел. Применить метод последовательных приближений для решения задачи с учетом трения в зоне контакта.
4. Построить и обосновать схему двойственности, основанную на модифицированном функционале Лагранжа, для решения задачи о теле, содержащем тонкий дефект с параметром.

5. Выполнить численную реализацию исследуемых алгоритмов при конечно-элементной аппроксимации задач.
6. Разработать комплекс вычислительных программ для выполнения численных расчетов. Провести численные эксперименты. Дать сравнительный анализ различных методов решения.

Научная новизна:

1. Показано, что функция чувствительности является слабо полунепрерывной снизу. Обосновано применение модифицированных функционалов Лагранжа к полукоэрцитивным задачам механики.
2. Для модельной задачи с трещиной исследована схема двойственности с классическим и модифицированным функционалами Лагранжа; показано, что множества седловых точек этих функционалов совпадают; обосновано применение алгоритма Удзавы для поиска седловой точки; построена аппроксимация с помощью метода конечных элементов; проведены численные расчеты и изучены их результаты.
3. Для задачи контакта двух тел исследована схема двойственности с классическим и модифицированным функционалами Лагранжа; показано, что множества седловых точек этих функционалов совпадают; обосновано применение алгоритма Удзавы для поиска седловой точки; обосновано применение итеративной проксимальной регуляризации; построена аппроксимация с помощью метода конечных элементов; проведены численные расчеты и проанализированы их результаты.
4. Для задачи контакта двух тел с учетом трения построена схема двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа; реализован алгоритм последовательных приближений; проведены численные расчеты и сравнение их результатов с результатами решения задачи, не учитывающей трение.
5. Для задачи о теле, содержащем дефект с параметром разрушения, построена схема двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа; сформулирована и доказана теорема о седловой точке; реализован обобщенный метод Ньютона с выбором величины шага по правилу Армихо; проведены численные расчеты с разными значениями параметров.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в обосновании применимости методов двойственности с модифицированными функционалами Лагранжа к исследованию контактных задача механики. Данные исследования имеют фундаментальный характер. Однако сформированные алгоритмы и их реализации на языке программирования C# или C++ для каждой задачи можно использовать при исследовании более сложных моделей и при решении прикладных задач.

Результаты проведенного научного исследования будут полезны при реализации образовательных программ в рамках математического моделирования.

Методология и методы исследования. При исследовании вариационных постановок задач использовался аппарат функционального анализа, теория выпуклого анализа, теория пространств С. Л. Соболева, общая теория нелинейных краевых задач.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Математический аппарат, основанный на методах двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа, для исследования контактных задач механики со свободной границей (модельная задача теории упругости с трещиной; контактная задача для двух упругих тел; задача о теле, содержащем тонкий дефект с параметром).
2. Применение эффективных численных алгоритмов с одновременной конечно-элементной аппроксимацией для решения поставленных задач.
3. Комплекс вычислительных программ на языке C++, реализующих численные алгоритмы, которые позволяют эффективно решать контактные задачи механики.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью постановки рассматриваемых задач и методов их исследования, строгостью математических рассуждений при доказательстве теорем, применением апробированных численных алгоритмов. Результаты численных расчетов при решении задач разными методами совпадают (в рамках допустимых погрешностей) и находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на: Всероссийской научной конференции «XXXVIII Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е. В. Золотова», г. Владивосток (сентябрь 2014 г.) [11]; XV Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения», г. Екатеринбург (март 2015 г.) [12]; III Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления», г. Хабаровск (июль 2015 г.) [13]; Международной конференции «Торическая топология, теория чисел и их приложения», г. Хабаровск (сентябрь 2015 г.) [14]; II Дальневосточной школе-семинаре «Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций», г. Комсомольск-на-Амуре (сентябрь 2017 г.) [15]; 5-й Дальневосточной конференции с международным участием «Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении», г. Комсомольск-на-Амуре (сентябрь 2018 г.) [16]; Международном семинаре «International Workshop on Computing Technologies and Applied Mathematics», г. Владивосток (июль 2022 г.) и г. Благовещенск (июнь 2023 г.); на конкурсе молодых ученых Хабаровского края (2015, 2016, 2017, 2019 годы).

Личный вклад. Автор принимал активное участие в разработке и обосновании модифицированных методов двойственности для исследования представленных контактных задач механики. Все реализации алгоритмов, написание компьютерных программ, а также численные расчеты проводились автором лично. Автор принимал активное участие в анализе и интерпретации полученных результатов, в оформлении публикаций в виде научных статей и докладов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 12 научных работах, из них 5 статей — в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России; 7 публикаций — в сборниках материалов и тезисов конференций. Получено 5 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Связь работы с научными темами и программами. Результаты диссертационной работы частично получены автором при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 122082400001-8).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и одного приложения. Полный объём текста — 141 стр., включая 25 рисунков и 8 таблиц. Список литературы содержит 110 наименований.

Содержание работы

Во **введении** приводится обзорное изложение истории развития и текущего состояния теории вариационных неравенств, обосновывается актуальность, формулируется цель, ставятся задачи исследования, излагается научная новизна и практическая значимость работы, кратко описывается её содержание.

Первая глава посвящена вопросу применения метода множителей Лагранжа для решения задач конечномерного выпуклого программирования. Алгоритмы, построенные на основе классических функций Лагранжа, сходятся медленно, и обоснование их теоретической сходимости выставляет весьма жесткие требования относительно выпуклости и дифференцируемости входящих в задачу функций. Введение модифицированных функций Лагранжа позволило развить новый класс методов, в которых указанные выше недостатки проявляются в значительно меньшей степени.

Дана задача конечномерного выпуклого программирования

$$\begin{cases} f(x) \to \min\limits_{x \in X}, \\ X = \{z \in \mathbb{R}^n \colon g^j(z) \leqslant 0, j = \overline{1,m}\}, \end{cases} \tag{1}$$

где $f(\cdot)$, $g^j(\cdot)$ — выпуклые (и, следовательно, непрерывные) на $\mathbb{R}^n$ функции. Пусть далее $g(x) = (g^1(x), \ldots, g^m(x))$.

Предполагается, что X — компактное множество, и выполняется условие Слейтера, т. е. существует точка $\widetilde{x} \in X$ такая, что $g(\widetilde{x}) < 0$. Тогда, как известно, классическая функция Лагранжа $L(x,p) = f(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} p_j g^j(x)$ имеет седловую точку $(x^*,p^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$, т. е.

$$L(x^*,p) \leqslant L(x^*,p^*) \leqslant L(x,p^*) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall p \in \mathbb{R}^m_+.$$

При этом x^* является решением исходной задачи (1), а p^* — двойственной:

$$\begin{cases} \underline{L}(p) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,p) \to \max\limits_{p\in X^*}, \\ X^* = \{\omega \in \mathbb{R}^m_+ \colon \underline{L}(\omega) > -\infty\}. \end{cases} \tag{2}$$

Эффективная область двойственной функции $\underline{L}(\cdot)$ может не совпадать с $\mathbb{R}^m$, что затрудняет решение задачи (2).

Модифицированная функция Лагранжа записывается так:

$$M(x,p) = f(x) + \frac{1}{2r}\sum_{j=1}^{m}\left(\left((p_j + rg^j(x))^+\right)^2 - p_j^2\right).$$

Здесь $(\varphi)^+ = max\{0,\varphi\}$, и константа $r > 0$ — параметр метода.

Модифицированная двойственная функция $\underline{M}(\cdot)$ имеет два представления:

$$\underline{M}(p) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{f(x) + \frac{1}{2r}\sum_{j=1}^{m}\left(\left((p_j + rg^j(x))^+\right)^2 - p_j^2\right)\right\}, \tag{3}$$

$$\underline{M}(p) = \inf_{v\in\mathbb{R}^m}\left\{\chi(v) + \sum_{j=1}^{m} p_j v_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{m} v_j^2\right\}. \tag{4}$$

Функция $\chi(\cdot)$, используемая в (4), называется функцией чувствительности:

$$\chi(v) = \begin{cases} \inf\limits_{g(x)\leqslant v} f(x), & \text{если } \{x\colon g(x) \leqslant v\} \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определение 1. *Пара* $(\overline{x},\overline{p}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *называется седловой точкой* $M(\cdot,\cdot)$, *если*

$$M(\overline{x},p) \leqslant M(\overline{x},\overline{p}) \leqslant M(x,\overline{p}) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall p \in \mathbb{R}^m.$$

В определении седловой точки для модифицированной функции Лагранжа левое неравенство должно выполняться для всех $p \in \mathbb{R}^m$, в отличие от определения седловой точки для классической функции Лагранжа. Известно, что $L(\cdot,\cdot)$ и $M(\cdot,\cdot)$ обладают одним и тем же множеством седловых точек, что позволяет вместо классической функции Лагранжа $L(\cdot,\cdot)$ для поиска седловых точек использовать ее модифицированный аналог $M(\cdot,\cdot)$. При построении и исследовании методов двойственности, основанных на модифицированных функциях Лагранжа, возникает естественный вопрос о разрешимости задачи (3) либо задачи (4). Очевидно, что из разрешимости одной задачи вытекает разрешимость другой. В литературе, как правило, исследуется задача (3). Для её разрешимости достаточно предположить, что $f(\cdot)$ есть сильно выпуклая функция. В данной работе, при наиболее общих предположениях о выпуклости функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$, исследуется вопрос о разрешимости задачи (4).

Если допустимое множество X в задаче (1) является компактным, то и множества вида $X_v = \{x\colon g(x) \leqslant v\} \quad \forall v \in \mathbb{R}^m$ также являются компактными. В этом случае $\chi(\cdot)$ есть собственная выпуклая функция. В существовавших ранее работах делалось предположение, что $\chi(\cdot)$ является непрерывной функцией, что на самом деле не так. Следующая теорема, полученная в ходе диссертационного исследования, устраняет этот недостаток существовавшей теории.

Теорема 1. *Пусть в задаче (1) множество X является компактным. Тогда функция чувствительности $\chi(\cdot)$ полунепрерывна снизу.*

Из теоремы следует, что функция $F_p(v) = \chi(v) + \sum\limits_{j=1}^{m} p_j v_j + \frac{r}{2} \sum\limits_{j=1}^{m} v_j^2$ для каждого фиксированного $p \in \mathbb{R}^m$ является полунепрерывной снизу на $\mathbb{R}^m$. Далее показывается, что $F_p(\cdot)$ есть коэрцитивная на $\mathbb{R}^m$ функция, что вместе с сильной выпуклостью на $\operatorname{dom}\chi$ гарантирует существование единственного элемента $v(p) = \operatorname*{argmin}\limits_{v \in \mathbb{R}^m} F_p(v)$. Таким образом, задача (4) разрешима.

Модифицированная двойственная задача имеет вид:

$$\underline{M}(p) \to \max_{p \in \mathbb{R}^m}. \tag{5}$$

Известно, что задачи (2) и (5) равносильны. Но, в отличие от (2), здесь функция $\underline{M}(\cdot)$ является гладкой, что позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Функция $\underline{M}(\cdot)$ дифференцируема на $\mathbb{R}^m$, ее производная $\nabla \underline{M}(\cdot)$ равна $v(p) = \operatorname*{argmin}\limits_{v \in \mathbb{R}^m} F_p(v)$ и, более того,*

$$\|v(\hat{p}) - v(\hat{\hat{p}})\|_{\mathbb{R}^m} \leqslant \frac{1}{r} \|\hat{p} - \hat{\hat{p}}\|_{\mathbb{R}^m} \qquad \forall \hat{p},\hat{\hat{p}} \in \mathbb{R}^m.$$

Таким образом $\nabla \underline{M}(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\frac{1}{r}$. Это позволяет использовать для решения задачи (2) градиентные алгоритмы:

$$p^{k+1} = p^k + \theta v(p^k), \qquad k = 0,1,2,... \qquad (p^0 \in \mathbb{R}^m \text{ — задано}), \tag{6}$$

$\theta > 0$ — длина шага сдвига.

Теорема 3. *Пусть $0 < \theta < 2r$. Тогда последовательность $\{p^k\}$, генерируемая по методу (6), сходится к решению двойственной задачи (5).*

Градиентный метод (6) может быть переписан в виде алгоритма Удзавы:

$$\begin{aligned} &(i) \quad x^{k+1} = \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} M(x,p^k), \\ &(ii) \quad p_j^{k+1} = p_j^k + \theta \max\{g^j(x^{k+1}), -\frac{p_j^k}{r}\}, \qquad j = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{7}$$

Если $\theta = r$, то из (ii) вытекает, что $p^{k+1} = (p^k + rg(x^{k+1}))^+$.

В предположении, что допустимое множество X в задаче (1) является компактным, и выполняется условие Слейтера, функция $M(\cdot,\cdot)$ имеет седловую точку. Для метода (7) справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Любая предельная точка последовательности $\{(x^k,p^k)\}$, генерируемой методом (7), является седловой точкой для $M(\cdot,\cdot)$.*

Таким образом, через решение двойственной задачи можно найти седловую точку модифицированной функции Лагранжа. При этом её первая компонента будет решением исходной задачи (1).

В конце главы рассматривается применение описанного метода двойственности на классическом примере — скалярной задаче Синьорини, для которой предварительно строится конечномерное приближение с помощью МКЭ.

В главах 2–4 рассматривается применение схем двойственности с модифицированными функционалами Лагранжа для решения задач бесконечномерного выпуклого программирования с нелинейными краевыми условиями. Основные отличия в построении схемы двойственности обусловленны тем, что в бесконечномерном случае для компактности пространства не достаточно замкнутости и ограниченности, в отличие от конечномерных евклидовых пространств. Дополнительно специфика самих задач добавляет некоторые особенности.

Вторая глава посвящена модельной задаче о равновесии упругого тела с трещиной. Классический подход к описанию подобных задач состоит в том, что на берегах трещины задаются краевые условия вида равенств. Однако с точки зрения приложений получаемые линейные модели обладают очевидным недостатком: противоположные берега трещины могут проникать друг в друга.

В работах А. М. Хлуднева, Е. М. Рудого, В. А. Ковтуненко, Е. В. Вторушина и др. рассматриваются более сложные модели, в которых берега трещины не могут проникать друг в друга. Взаимное непроникновение берегов трещины достигается за счет того, что на берегах задаются нелинейные краевые условия.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная выпуклая область с границей Γ, $\gamma \subset \Omega$ — непрерывная незамкнутая кривая без самопересечений.

В области Ω требуется найти функцию u, такую, что:

$$\begin{aligned} -\triangle u &= f \text{ в } \Omega, \\ u &= 0 \text{ на } \Gamma, \\ [u] \geqslant 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}[u] &= 0 \text{ на } \gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &\leqslant 0 \text{ на } \gamma^{\pm}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $f \in L_2(\Omega)$ — заданная функция; n — нормаль к трещине; $[u] = u^+ - u^-$ — скачок функции u на γ (в каждой точке $x \in \gamma$ функция принимает два значения: u^+ и u^-, соответствующие верхнему и нижнему берегу трещины).

Значение функции u в области Ω можно интерпретировать как вертикальные смещения точек пластины под действием силы f.

Пусть $H^1_\Gamma(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \colon\ v = 0 \text{ на } \Gamma\}$, $K = \{v \in H^1_\Gamma(\Omega) \colon [v] \geqslant 0 \text{ на } \gamma\}$. Задача (8) соответствует задаче минимизации функционала энергии

$$J(v) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla v|^2 \, d\Omega - \int\limits_\Omega f v \, d\Omega \to \min_{v \in K}. \tag{9}$$

В предположении H^2-регулярности функции u можно показать, что решение задачи (9) является и решением (8). В монографии А. М. Хлуднева подробно исследован вопрос о разрешимости данной задачи и приведены важные свойства функционала $J(\cdot)$: он является выпуклым, дифференцируемым по Гато и слабо полунепрерывным снизу на $H^1(\Omega)$, коэрцитивным на $H^1_\Gamma(\Omega)$.

Для решения задачи (9) строится схема двойственности, основанная на модифицированном функционале Лагранжа. Этот метод двойственности позволяет снять ограничение $[v] \geqslant 0$ на γ, и вместо минимизации функционала $J(\cdot)$ на K в задаче (9) проводить минимизацию на всем пространстве $H^1_\Gamma(\Omega)$.

Модифицированный функционал Лагранжа для данной задачи:

$$M(v,l) = J(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_\gamma \left(\left((l - r[v])^+ \right)^2 - l^2 \right) ds,$$

где $r = const > 0, \quad (l - r[v])^+ = \max\{0, l - r[v]\}$.

Двойственный функционал $\underline{M}(l) = \inf\limits_{v \in H^1_\Gamma(\Omega)} M(v,l)$, двойственная задача:

$$\underline{M}(l) \to \max_{l \in L_2(\gamma)}. \tag{10}$$

Двойственный функционал имеет два эквивалентных представления:

$$\underline{M}(l) = \inf_{v \in H^1_\Gamma(\Omega)} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_\gamma \left(\left((l - r[v])^+ \right)^2 - l^2 \right) ds \right\}, \tag{11}$$

$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} \left\{ \chi(m) + \int\limits_\gamma lm \, ds + \frac{r}{2}\int\limits_\gamma m^2 \, ds \right\}. \tag{12}$$

Здесь $\chi(\cdot)$ — заданный на пространстве $L_2(\gamma)$ функционал чувствительности:

$$\chi(m) = \begin{cases} \inf\limits_{v \in K_m} J(v), & \text{если } K_m = \{v \in H^1_\Gamma(\Omega) \colon\ -[v] \leqslant m \text{ на } \gamma\} \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{если } K_m = \varnothing. \end{cases}$$

Запись (11) используется непосредственно в алгоритмах поиска седловой точки, а запись (12) — в доказательстве нескольких теорем.

Лемма 1. *Если $\{u_i\}$ — ограниченная последовательность в $H^1(\Omega)$, то $\{[u_i]\}$ является компактной последовательностью в $L_2(\gamma)$.*

Лемма 1 специфична для задач с трещинами и используется для доказательства следующей теоремы.

Теорема 5. *Функционал чувствительности $\chi(\cdot)$ является слабо полунепрерывным снизу функционалом на $L_2(\gamma)$.*

На основе теоремы 5 доказывается непрерывность функционала $\underline{M}(\cdot)$ в $L_2(\gamma)$. Это, в свою очередь, необходимо для доказательства следующей теоремы, дающей способ решения двойственной задачи.

Теорема 6. *Двойственный функционал $\underline{M}(\cdot)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\gamma)$, и его производная $\nabla\underline{M}(l) = \operatorname*{argmin}_{m\in L_2(\gamma)}\{\chi(m) + \int\limits_\gamma lm\,ds + \frac{r}{2}\int\limits_\gamma m^2\,ds\}$ удовлетворяет условию Липшица с константой $1/r$, то есть*

$$\|\nabla\underline{M}(l_1) - \nabla\underline{M}(l_2)\|_{L_2(\gamma)} \leqslant \frac{1}{r}\|l_1 - l_2\|_{L_2(\gamma)} \quad \forall l_1,l_2 \in L_2(\gamma).$$

Благодаря Липшиц-непрерывности $\nabla\underline{M}(\cdot)$ для решения двойственной задачи (10) можно использовать градиентный метод:

$$l^{k+1} = l^k + \theta_k\nabla\underline{M}(l^k), \quad k = 0,1,2,\dots \tag{13}$$

с любым начальным $l^0 \in L_2(\gamma)$ и шагом $\theta_k \in (0,2r)$.

Теорема 7. *Для алгоритма (13) выполняется предельное равенство*

$$\lim_{k\to\infty}\|\nabla\underline{M}(l^k)\|_{L_2(\gamma)} = 0.$$

Алгоритм (13) переписывается следующим образом

$$\begin{aligned}
&(i) \quad u^{k+1} = \operatorname*{argmin}_{v\in H^1_\Gamma(\Omega)}\left\{J(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_\gamma\left(\left((l^k - r[v])^+\right)^2 - (l^k)^2\right)ds\right\}\\
&(ii) \quad l^{k+1} = l^k + \theta_k\max\left\{-[u]^{k+1}, -\frac{l^k}{r}\right\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

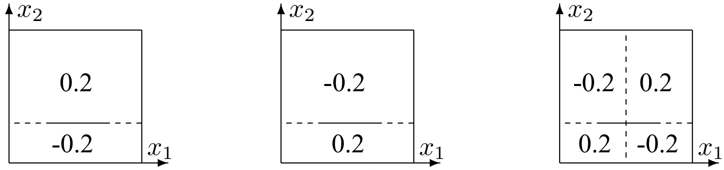
При условии разрешимости задачи (10) алгоритм (14) сходится по функционалу $J(\cdot)$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} J(u^k) = \min\limits_{v\in K} J(v) = J(u^*)$, где u^* — решение задачи (9).

В предположении, что решение исходной задачи $u^* \in H^2(\Omega)$ можно доказать, что метод (14) сходится к седловой точке $(u^*,l^*) \in H^1_\Gamma(\Omega) \times L_2(\gamma)$.

Следует отметить, что H^2-регулярность не свойственна задачам с трещинами, но, тем не менее, численные расчеты показывают хорошую сходимость.

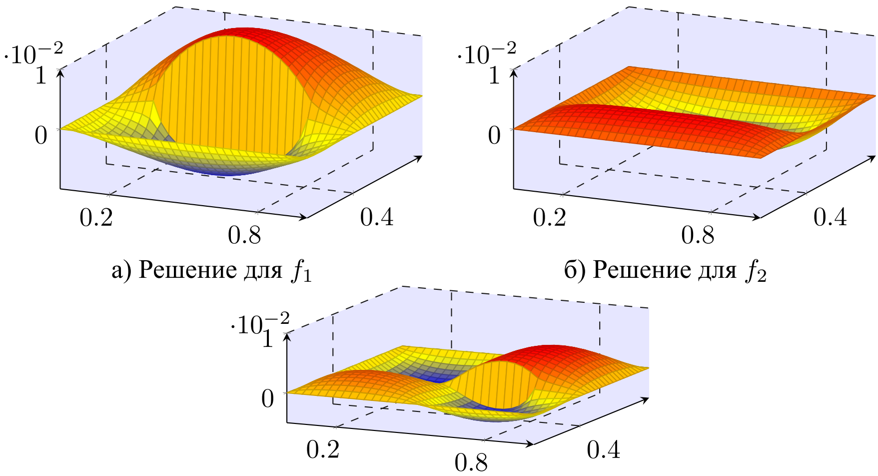
Для реализации алгоритма (14) выполнялась дискретизация задачи с помощью МКЭ. Задача минимизации кусочно-квадратичного функционала на первом шаге решалась методом покоординатного спуска.

Решение задачи выполнялось на единичном квадрате для трех случаев распределения силы f, представленных на рисунке 1. Соответствующие решения можно увидеть на рисунке 2.



а) f_1 б) f_2 в) f_3

Рисунок 1 — Различные значения функции f для задачи с трещиной



а) Решение для f_1 б) Решение для f_2

в) Решение для f_3

Рисунок 2 — Решения задачи для разных значений f ($h = 1/32$)

В первом варианте берега трещины полностью расходятся (рисунок 2а). Для второго примера ограничения задачи не позволяют берегам разойтись (рисунок 2б), так что скачок функции u на γ равен нулю, при этом двойственная переменная принимает ненулевые значения. Третий вариант более интересен, так как здесь есть участок границы γ, на котором берега трещины разошлись, и есть участок, на котором берега остались слипшимися (рисунок 2в).

В работе проводится исследование скорости сходимости МФЛ в зависимости от значения параметра метода r. Установлено, что большее значение этого параметра приводит к большей скорости сходимости.

Третья глава посвящена исследованию возможности применения МФЛ для решения задачи о контакте двух тел. В отличие от задачи, рассмотренной во второй главе, это задача в перемещениях и с коэффициентами, учитывающими физические характеристики материалов тел.

При решении таких задач используются разные итерационные алгоритмы, но обычно рассматривается коэрцитивный случай, когда оба тела закреплены на части границы. В данном же исследовании рассмотрена более сложная постановка, когда система тел имеет одну степень свободы. Для такого случая нельзя доказать сходимость классических методов двойственности к седловой точке.

Два плоских упругих тела занимают в недеформированном состоянии области $\Omega', \Omega'' \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевыми границами. Границы областей разбиты на участки: $\partial\Omega' = \overline{\Gamma_u} \cup \overline{\Gamma'_\tau} \cup \Gamma_K$, $\partial\Omega'' = \overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma''_\tau} \cup \Gamma_K$, причем $\operatorname{mes}\Gamma_u > 0$, $\operatorname{mes}\Gamma_K > 0$ и зона контакта Γ_K не расширяется.

На тела действуют объемные и поверхностные силы: F и P. Изменение формы тел описывается векторным полем перемещений $u = (u_1,u_2)$ и характеризуется тензором деформации $\varepsilon_{ij}(u)$. Физические свойства тел задаются модулем упругости E и коэффициентом Пуассона μ. Тензор напряжений σ связан с деформациями ε через тензор упругости $\sigma_{ij}(u) = c_{ijkm}\varepsilon_{km}(u), i,j = 1,2$. Компоненты тензора упругости c_{ijkm} обладают свойствами: $c_{ijkm} = c_{jikm} = c_{kmij}$, $\exists c_0 : c_{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \geqslant c_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$.

Краевая постановка данной задачи имеет вид:

$$\sigma^\alpha_{ij,j}(u) + F^\alpha_i = 0, \text{ в } \Omega^\alpha \tag{15}$$

$$\sigma^\alpha_{ij}(u)n^\alpha_j = P^\alpha_i \text{ на } \Gamma^\alpha_\tau, \tag{16}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_u \subset \partial\Omega', \tag{17}$$

$$u_n = u_i n_i = 0 \text{ на } \Gamma_0 \subset \partial\Omega'', \tag{18}$$

$$u'_n + u''_n \leqslant 0, \quad \sigma'_n(u) = \sigma''_n(u) \leqslant 0, \text{ на } \Gamma_K, \tag{19}$$

$$(u'_n + u''_n)\sigma'_n(u) = 0, \text{ на } \Gamma_K, \tag{20}$$

$$\sigma'_\tau(u) = \sigma''_\tau(u) = 0, \text{ на } \Gamma_K, \tag{21}$$

здесь $\alpha \in \{',''\}$, $n^\alpha = (n^\alpha_1,n^\alpha_2)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega^\alpha$, $u^\alpha_n = u^\alpha_i n^\alpha_i$, $\sigma^\alpha_n(u) = \sigma(u^\alpha)n^\alpha_i n^\alpha_j$, $\sigma^\alpha_\tau(u) = \sigma^\alpha_{ij}(u^\alpha)n^\alpha_j - \sigma^\alpha_n(u)n_i$.

Пусть $V = \{v \in H^1(\Omega)\colon v' = 0 \text{ на } \Gamma_u, v''_n = 0 \text{ на } \Gamma_0\}$, допустимое множество $K = \{v \in V(\Omega)\colon v'_n + v''_n \leqslant 0 \text{ на } \Gamma_K\}$. Вариационная формулировка задачи:

$$\mathscr{L}(v) = \frac{1}{2}A(v,v) - FP(v) \to \min_{v \in K}. \tag{22}$$

Здесь $A(u,v) = \int\limits_\Omega c_{ijkm}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{km}(v)\,d\Omega$ — билинейная, симметричная, неотрицательно определенная форма и $FP(v) = \int\limits_\Omega F_i v_i\,d\Omega + \int\limits_{\Gamma_\tau} P_i v_i\,ds$ — линейная форма.

При выполнении условий (17) и (18) пространство жестких перемещений системы является одномерным, так что ядро квадратичной формы $A(v,v)$ не является тривиальным. Из-за этого даже при выполнении условия существования и единственности решения нельзя доказать сходимость классических методов двойственности к седловой точке.

В разделе 3.2 модифицированная схема двойственности строится так же, как это было сделано в главе 2. В ходе построения схемы двойственности доказывается следующая теорема, показывающая, что седловая точка имеет определенный физический смысл.

Теорема 8. *Пусть $u \in H^2(\Omega)$. Тогда $(u, -\sigma_n'(u))$ — седловая точка модифицированного функционала Лагранжа $M(\cdot,\cdot)$.*

Конечно-элементная реализация алгоритма Удзавы в полукоэрцитивном случае приводит к вырожденной матрице квадратичной формы минимизируемого функционала. Для устранения этого недостатка в разделе 3.3 строится устойчивый алгоритм, основанный на итеративной проксимальной регуляризации модифицированного функционала Лагранжа $M(\cdot, \cdot)$.

В разделе 3.4 рассматривается более сложная модель, учитывающая трение в области контакта. Для этого условие (21) на Γ_K заменяется законом Кулона:

$$\sigma_\tau'(u) = \sigma_\tau''(u) = \sigma_\tau, \quad |\sigma_\tau| \leqslant \mathcal{F}|\sigma_n|, \quad (|\sigma_\tau| - \mathcal{F}|\sigma_n|)|u_\tau' + u_\tau''| = 0,$$
$$u_\tau' + u_\tau'' = \lambda\sigma_\tau \text{ на } \{x \in \Gamma_K : \mathcal{F}\sigma_n < 0\},$$

где $\mathcal{F} \geqslant 0$ — коэффициент трения и λ — неположительная функция на Γ_K.

Решение $u \in K$ краевой задачи с трением удовлетворяет квазивариационному неравенству:

$$A(u,v-u) + \int\limits_{\Gamma_K} \mathcal{F}|\sigma_n|(|v_\tau' + v_\tau''| - |u_\tau' + u_\tau''|)\,ds \geqslant FP(v-u) \quad \forall v \in K. \quad (23)$$

Построение и исследование численных алгоритмов решения подобных задач осложнено зависимостью силы трения $\mathcal{F}|\sigma_n(u)|$ от искомого решения u.

Для решения квазивариационного неравенства в работе применяется метод последовательных приближений. Каждый итерационный шаг этого метода заключается в решении задачи с фиксированной силой трения $g_m = \mathcal{F}|\sigma_n(u^k)|$ с последующим вычислением нового значения g_{m+1}. Для решения задачи с фиксированной силой трения используется рассмотренный ранее модифицированный метод двойственности. Как следует из теоремы 8, помимо решения прямой задачи алгоритм Удзавы дает на выходе ещё и значение двойственной переменной, которое совпадает с σ_n и может использоваться для вычисления g_{m+1}.

Далее приводятся результаты численных расчетов для случая, когда два одинаковых тела образуют единичный квадрат (рисунок 3), и на левую треть верхней стороны тела Ω'' воздействует сила $P_2'' = -60$ Н. Объемные силы отсутствуют. Модуль упругости $E = 73000$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.34$.

При таком воздействии силы P_2'' в левой части области контакта Γ_K тела остаются сомкнуты, а в правой части происходит размыкание. На рисунке 4,

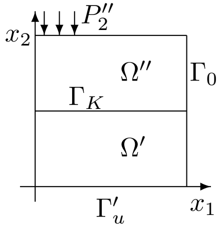


Рисунок 3 — Распределение поверхностной силы P_2''

сделанном при шаге триангуляции $h = \frac{1}{200}$, изображена область контакта в месте, где тела разомкнулись (по горизонтальной оси это участок $[0.6, 1.0]$, а по вертикальной сделано увеличение до порядка 10^{-5} и значение 0.0 соответствует границе контакта в состоянии с нулевыми силами). Линиями с треугольными маркерами (—△— и —△—) изображены границы тел для случая, когда трение отсутствует. Линиями с квадратными маркерами (—□— и —□—) изображены границы тел для случая, когда $\mathcal{F} = 0.5$. Как видно, без учета трения тела разошлись на участке $[0.67, 1.00] \subset \Gamma_K$, а с учетом трения на $[0.78{,}1.00] \subset \Gamma_K$.

Приведено исследование скорости сходимости используемых методов в зависимости от параметра r. Общий вывод заключается в том, что большее значение параметра r приводит к большей скорости сходимости методов.

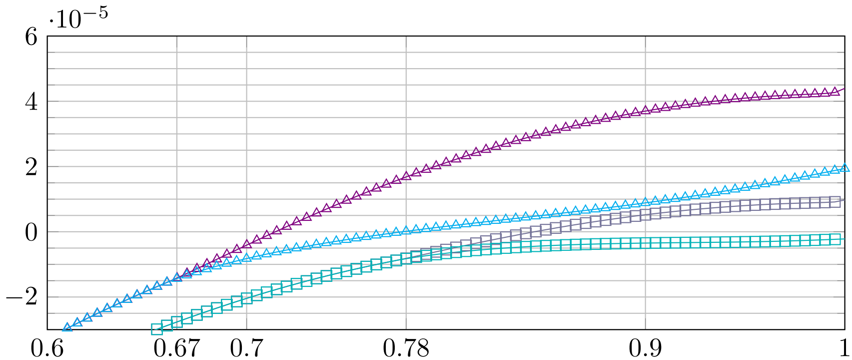


Рисунок 4 — Вид зоны контакта Γ_K в месте расхождения тел (при $h = \frac{1}{200}$)

Четвертая глава посвящена применению МФЛ для решения двумерной задачи о теле с дефектом, свойства которого характеризуются параметром разрушения. В отличие от задачи, рассмотренной во главе 2, это задача в перемещениях и с коэффициентами, учитывающими физические характеристики тела.

На тело Ω, содержащее дефект γ — гладкую кривую без самопересечений, действуют объемные силы $f \in L_2(\Omega)$. Требуется найти поле перемещений u

и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}, i,j = 1{,}2$, такие что выполняется система равенств и неравенств:

$$-div\,\sigma = f, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \text{ в } \Omega, \tag{24}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{25}$$

$$[u_\nu] \geqslant 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad [\sigma_\tau] = 0 \text{ на } \gamma, \tag{26}$$

$$-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu] \geqslant 0, \quad -\sigma_\tau + \frac{1}{\delta}[u_\tau] = 0 \text{ на } \gamma, \tag{27}$$

$$[u_\nu](-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]) = 0 \text{ на } \gamma. \tag{28}$$

Первое неравенство в (26) накладывает запрет на проникновение берегов дефекта друг в друга. Параметр разрушения $\delta > 0$ описывает свойства дефекта. Предельный случай при $\delta \to 0$ соответствует задаче без дефекта, а при $\delta \to \infty$ задача превращается в задачу с трещиной.

Пусть $H^1_\Gamma(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega)\colon\, v = 0 \text{ на } \Gamma\}$, $K = \{v \in H^1_\Gamma(\Omega)\colon\, [v_\nu] \geqslant 0 \text{ на } \gamma\}$. Рассматриваемая задача представима в виде задачи минимизации функционала:

$$\Pi(v) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sigma(v)\varepsilon(v)\,d\Omega - \int\limits_\Omega fv\,d\Omega + \frac{1}{2\delta}\int\limits_\gamma [v]^2\,ds \to \min_{v\in K}. \tag{29}$$

Схема двойственности на основе модифицированного функционала Лагранжа строится аналогично таковой для других задач бесконечномерного выпуклого программирования с учетом особенностей задач с трещинами, в которых фигурирует скачок функции, как в главе 2.

Модифицированный функционал Лагранжа для задачи (29) имеет вид:

$$M(v,l) = \Pi(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_\gamma \left(\left((l - r[v_\nu])^+\right)^2 - l^2\right) ds.$$

Теорема 9. *Если решение u задачи (29) принадлежит пространству $H^2(\Omega)$, то модифицированный функционал Лагранжа $M(\cdot,\cdot)$ обладает седловой точкой $(u, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu])$ на $H^1_\Gamma(\Omega) \times L_2(\gamma)$, т. е.*

$$M(u,l) \leqslant M(u, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]) \leqslant M(v, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]) \qquad \forall (v,l) \in H^1_\Gamma(\Omega) \times L_2(\gamma).$$

Для поиска седловой точки $M(\cdot,\cdot)$ используется алгоритм Удзавы, который записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &(i) \quad u^{k+1} = \operatorname*{argmin}_{v\in H^1_\Gamma(\Omega)} M(v,l^k), \\ &(ii) \quad l^{k+1} = (l^k - r[u^{k+1}_\nu])^+. \end{aligned} \tag{30}$$

Далее выполняется аппроксимация и доказывается теорема 10, позволяющая при достаточно малых $h < 1$ дать оценку точности приближенных решений задачи: $\|u_h - u\|_{H^1_\Gamma(\Omega)} \leqslant Ch^{1/2}$.

Теорема 10. *Пусть Ω — прямоугольная область в $\mathbb{R}^2$, $f \in L_2(\Omega)$, решение исходной задачи $u \in H^2_\Gamma(\Omega)$. Тогда имеет место оценка*

$$\|u_h - u\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega)} \leqslant C'h\|u\|_{H^2(\Omega)} + C''h^2\|u\|^2_{H^2(\Omega)},$$

где константы C', C'' не зависят от h.

В численных расчетах на первом шаге алгоритма Удзавы используется обобщенный метод Ньютона:

$$t^{m+1} = t^m - s_m(\partial g(t^m))^{-1}g(t^m), \tag{31}$$

где t^m — конечномерное решение, полученное на шаге m, s_m — шаг сдвига, в простейших случаях равный единице, $\partial g(t^m)$ — гессиан и $g(t^m)$ — градиент минимизируемой функции $\widehat{M}(\cdot,\cdot)$ в конечномерной задаче.

Из-за положительной срезки в последнем слагаемом минимизируемой функции её вторая производная не является непрерывной. Поэтому, несмотря на то, что функция квадратичная, метод Ньютона не приводит к решению за одну итерацию. По сути, выполнение одного шага этого метода может привести к получению новой задачи с другим минимумом. Для того, чтобы добиться гарантированного уменьшения значения функции, происходит дробление шага s до тех пор, пока не выполнится условие Армихо:

1. Задается $s = 1$.
2. Вычисляется направление сдвига $d^m = (\partial g(t^m))^{-1}g(t^m)$.
3. Вычисляется $t^{m+1} = t^m - s \cdot d^m$.
4. Если $\widehat{M}(t^{m+1},\alpha) < \widehat{M}(t^m,\alpha) + s \cdot \langle \nabla\widehat{M}(t^m,\alpha), d^m\rangle$, выбор s завершен.
5. Иначе $s = s/2$ и происходит переход на шаг 3.

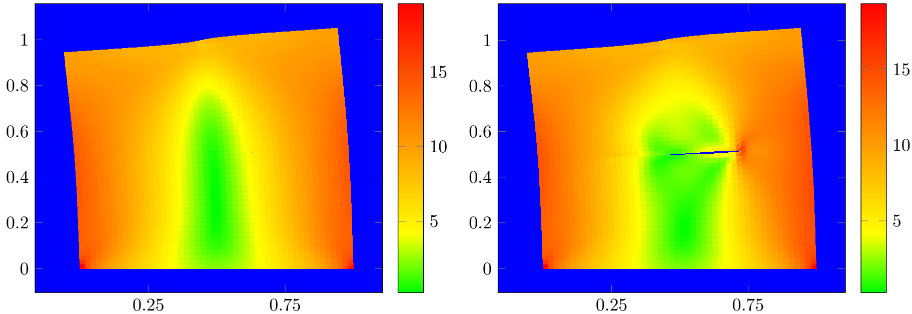
После этого выполняется одна итерация метода (31). Дробление шага s можно выполнять и с меньшим коэффициентом (в экспериментах $s = s/1.1$). При этом выполняется большее число итераций дробления шага, но каждый шаг метода Ньютона становится эффективнее, из-за чего количество итераций уменьшается, а значит сокращается и число самых продолжительных операций — вычислений обратных матриц к матрице Гессе.

Численные расчеты проведены для Ω, представляющего собой единичный квадрат, и дефекта $\gamma = \{(x_1, x_2)\colon \frac{1}{4} < x_1 < \frac{3}{4}, x_2 = \frac{1}{2}\}$. Модуль упругости Юнга $E = 69000$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Для наглядности условие закрепления (25) на всей внешней границе заменено закреплением на нижней стороне тела $\Gamma_u = \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega\colon x_2 = 0\}$, а вместо объемных сил применены поверхностные к верхней стороне тела $\Gamma_f = \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega\colon x_2 = 1\}$.

Показательно решение с силой f_2, так как в таком случае слипание берегов происходит лишь на части дефекта. На рисунке 5 продемонстрировано деформированное состояние тела в лагранжевых координатах с увеличивающим коэффициентом 300 по обеим осям ($x + 300 \cdot u(x)$). Цветом показано распределение напряжений Мизеса — второго инварианта тензора напряжений.

$$f_2(x_1,x_2) = \begin{cases} -10\text{ Н}, & (x_1,x_2) \in \Gamma_f, x_1 < \frac{1}{2}, \\ +10\text{ Н}, & (x_1,x_2) \in \Gamma_f, x_1 > \frac{1}{2}, \\ \quad 0\text{ Н}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При маленьком значении δ дефект практически отсутствует (рисунок 5а), при большем значении происходит переход к задаче с трещиной (рисунок 5б).



а) $\delta = 10^{-7}$ б) $\delta = 10^{-1}$

Рисунок 5 — Деформированное состояние для задачи с f_2

На рисунке 6 с увеличением по оси ординат в 10^5 раз представлена форма дефекта и его расположение относительно исходного положения на уровне $x_2 = \frac{1}{2}$. Линии и соответствуют верхнему и нижнему берегу дефекта при $\delta = 10^{-1}$, а линии и берегам при $\delta = 10^{-5}$.

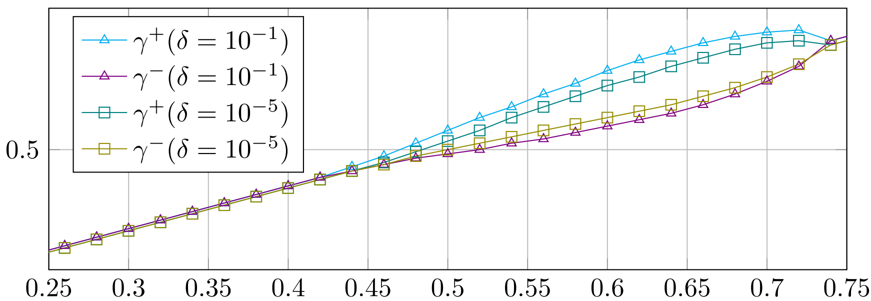


Рисунок 6 — Форма дефекта в задачах с f_2 (при разных значениях δ)

В таблице 1 проведена оценка скорости сходимости метода для задачи с f_2 при широком диапазоне значений параметра разрушения δ.

Таблица 1 — Количество итераций для f_2 (множитель уменьшения s равен 1.1)

δ	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
$k_{\text{МУ}}$	8	12	8	11	10	11	19	121	888
$m_{\text{МН}}$	13	17	13	16	15	14	21	122	889

В теореме 10 при $\delta \to 0$ константа C' может начать преобладать, так что оценка точности решения может ухудшиться. Численные расчеты показывают, что при предельных значениях параметра δ увеличивается сложность вычислений. В таких случаях целесообразно переходить к соответствующей предельной модели, в которой параметр δ отсутствует.

Несмотря на то, что сходимость метода Удзавы с модифицированными функционалами Лагранжа доказывается в предположении H^2-регулярности решения, которая для задач теории трещин не свойственна, численная реализация методов стабильно приводит к решению.

В **приложеними** представлены коды вычислительных программ, реализующих используемые алгоритмы для решения поставленных задач, на языке программирования C# и на языке программирования C++ с использованием программно-аппаратной архитектуры параллельных вычислений CUDA.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Уточнены существующие доказательства некоторых положений теории модифицированной функции Лагранжа применительно к задачам с выпуклыми функциями. Обоснована справедливость применения теории модифицированных функционалов Лагранжа к задачам выпуклого программирования в случае не сильно выпуклой целевой функции.
2. Обосновано применение модифицированных функционалов Лагранжа для решения модельной задачи с трещиной, задачи контакта двух упругих тел (в том числе в полукоэрцитивном случае), задачи о теле с дефектом, с параметром поврежденности. Обоснована теоретическая сходимость методов.
3. Выполнена численная реализация схем двойственности при конечно-элементной аппроксимации задач. Для получаемых задач конечномерной минимизации применены и реализованы эффективные численные алгоритмы.
4. Разработаны программные приложения для численных расчетов при исследовании поставленных задач.
5. Проведен сравнительный анализ результатов вычислительных экспериментов. Для рассмотренных задач описана скорость сходимости в зависимости от параметра метода r, который может быть сколь угодно большим. Для задачи о теле с дефектом описана скорость сходимости в зависимости от значения параметра поврежденности δ.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях из списка ВАК РФ

1. *Жильцов, А. В.* Метод множителей Лагранжа в задача конечномерного выпуклого программирования / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // Дальневосточный математический журнал. — 2015. — Т. 15, № 1. — С. 53—60.
2. *Жильцов, А. В.* Метод множителей Лагранжа для решения модельной задачи с трещиной / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // Математические заметки СВФУ. — 2015. — Т. 22, № 1. — С. 93—103.
3. *Жильцов, А. В.* Метод множителей Лагранжа для решения задачи об одностороннем контакте упругих тел с ограниченной зоной контакта / А. В. Жильцов // Математические заметки СВФУ. — 2016. — Т. 23, № 4. — С. 99—114.
4. *Жильцов, А. В.* Устойчивый алгоритм решения полукоэрцитивной задачи контакта двух тел с трением на границе / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // Дальневосточный математический журнал. — 2019. — Т. 19, № 2. — С. 173—184.
5. *Жильцов, А. В.* Двойственный метод для решения задачи о равновесии тела, содержащего тонкий дефект / А. В. Жильцов, Н. Н. Максимова // Сиб. ЖВМ. — 2023. — Т. 26, № 2. — С. 183—198. — (переводная версия в журнале «Numerical Analysis and Applications», реф. SCOPUS).

Зарегистрированные программы для ЭВМ

6. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Метод множителей Лагранжа для решения задачи об одностороннем контакте двух упругих тел с ограниченной зоной контакта / А. В. Жильцов. — № 2016660152 ; заявл. 08.09.2016 ; опубл. 12.07.2016, 2016660152 (Рос. Федерация).
7. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Метод множителей Лагранжа для решения модельной задачи о двумерном теле с трещиной / А. В. Жильцов ; ДВГУПС. — № 2016660834 ; заявл. 29.07.2016 ; опубл. 22.09.2016, 2016660834 (Рос. Федерация).
8. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Расчет напряженно-деформированных состояний тел с ограниченной зоной контакта модифицированным методом двойственности с регуляризацией / А. В. Жильцов, Э. М. Вихтенко ; ТОГУ. — № 2017611879 ; заявл. 10.02.2017 ; опубл. 14.11.2016, 2017611879 (Рос. Федерация).
9. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Расчет напряженно-деформированных состояний двух тел с трением на границе контакта при помощи метода последовательных приближений с регуляризацией модифицированного функционала Лагранжа / А. В. Жильцов ; ДВГУПС. — № 2019616732 ; заявл. 21.05.2020 ; опубл. 29.05.2019, 2019616732 (Рос. Федерация).

10. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ*. Программа для решения задачи о теле с дефектом с использованием обобщенного метода Ньютона с правилом Армихо / А. В. Жильцов. — № 2023611960 ; заявл. 17.01.2023 ; опубл. 26.01.2023, 2023611960 (Рос. Федерация).

В сборниках трудов конференций

11. *Жильцов*, *А. В.* Метод множителей Лагранжа в задаче конечномерного выпуклого программирования / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // XXXVIII Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е. В. Золотова. — 2014. — С. 135—140.

12. *Жильцов*, *А. В.* Модифицированные функционалы Лагранжа для решения модельной задачи с трещиной / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // Математическое программирование и приложения. — 2015. — С. 27—28.

13. *Жильцов*, *А. В.* Использование параллельного программирования при численном решении модельной задачи с трещиной методом градиентного спуска / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // В сборнике: Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления материалы III всероссийской науч.-практ. конф. Ответственные за выпуск: А. И. Мазур, А. Л. Верхотуров. — 2015. — С. 52—56.

14. *Жильцов*, *А. В.* Метод множителей Лагранжа для решения модельной задачи с трещиной / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // Торическая топология, теория чисел и их приложения. Материалы Международной конференции. Под научной ред. В. М. Бухштабера, В. А. Быковского. — 2015. — С. 80—81.

15. *Жильцов*, *А. В.* Модифицированные функционалы Лагранжа для решения задачи контакта двух тел с учетом трения / А. В. Жильцов // Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций. — 2017. — С. 27—30.

16. *Жильцов*, *А. В.* Обобщенный метод Ньютона для решения контактной задачи теории упругости / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении. — 2018. — С. 101—104.

17. *Жильцов*, *А. В.* Седловая точка функционалов Лагранжа в задаче о теле, содержащем тонкий дефект с параметром / А. В. Жильцов // Информатика и системы управления. — 2022. — Т. 73, № 3. — С. 84—92.

Жильцов Александр Владимирович

Оптимизационные алгоритмы с модифицированными функционалами Лагранжа для решения контактных задач механики

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ____