

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ХАБАРОВСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
(ХФИЦ ДВО РАН)

На правах рукописи



ПОТАПОВ ДМИТРИЙ ИГОРЕВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ
И БЕРЕГОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СТОРАХ РАВНИННЫХ РЕК**

Специальность: 1.2.2 «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Потапов Игорь Иванович

Хабаровск – 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список сокращений и условных обозначений	4
Введение	6
Глава 1 Общая математическая постановка задачи	14
1.1. Описание физического явления и математическая постановка.....	14
1.2. Движение речного потока в створе русла в переменных вихрь – функция тока..	17
1.3. Алгебраические модели турбулентной вязкости	20
1.4. Модель русловых деформаций в створе русла	24
1.5. Заключение по главе 1	27
Глава 2 Выборка данных для валидации предложенных моделей.....	29
2.1. Обзор информационной системы “Амур”	29
2.2. Выборка данных натурных наблюдений для тестирования моделей береговых процессов.....	33
2.3 Заключение по главе 2	40
Глава 3. Модель установившегося течения реки в поперечном сечении изогнутого русла	42
3.1. Задача о движении речного потока в створе кругового канала.	43
3.2. Математическая постановка задачи	44
3.3. Слабая формулировка задачи.	46
3.4. Дискретный аналог задачи.	47
3.5. Алгоритм решения задачи.	49
3.6. Решение задачи в прямоугольном створе	51
3.7. Решение задачи в канале Розовского.....	58
3.8. Решение задачи о движении установившегося потока в створе русла.	64
3.9. Заключение.....	75
Глава 4. Исследование береговых процессов в створах рек (каналов)....	77
4.1 Математическая постановка задачи, метод и алгоритм ее решения	77
4.1.1 Физическая постановка задачи	77
4.1.2 Математическая постановка задачи	78
4.1.3 Метод решения задачи	80
4.1.4. Дискретный аналог задачи	80
4.1.5. Алгоритм решения задачи.	82

4.2 Валидация предложенной модели на задачах о размыве берегового откоса	84
4.2.1 Результаты моделирования для потоков с постоянным расходом	84
4.2.2 Результаты моделирования для потоков с переменным расходом.....	87
4.3 Решение задачи о размыве правого берега переливной запруды на протоке Пемзенской.....	91
4.3.1 Описания физической формулировки задачи.....	91
4.3.2 Результаты расчетов.....	93
4.4 Заключение по главе 4	97
Заключение	99
Список литературы (References)	101

Список сокращений и условных обозначений

u_x, u_y, u_z – осредненные (по Рейнольдсу) скорости речного потока,

u_x^0, u_y^0, u_z^0 – скорости речного потока в начальный момент времени,

$Q_x = \rho g J_x, Q_y = \rho g J_y, Q_z = \rho g$ – объемные силы,

J_x, J_y – средние уклоны речного русла в плане потока,

g – ускорение свободного падения,

η – уровень свободной поверхности потока

ζ – отметки донно-береговой поверхностей

$\mu = \mu_0 + \mu_t$ – эффективная вязкость потока,

μ_0 – молекулярная вязкость потока,

μ_t – турбулентная вязкость потока,

P – давление в жидкости,

P_b – придонное давление (из которого вычтена гидростатическая составляющая).

n_x, n_y, n_z – компоненты нормали к свободной поверхности речного потока,

F_x, F_y, F_z – поверхностные силы ветровой нагрузки.

ρ_w – плотность воды,

ρ_s – плотность песка,

d_{50} – средний диаметр донных частиц,

κ – коэффициент Кармана для водогрунтовой смеси $0.2 \leq \kappa \leq 0.41$,

T_{0c} – критическое придонное касательное напряжение на ровном дне,

φ – угол внутреннего трения донных частиц,

γ – острый угол между нормалью к поверхности дна и вертикальной осью координат,

c_x – лобовое сопротивление частиц,

Q_{in} – заданный расход потока,

$s_f = f \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w}$, $f \approx 0.1$ – концентрация наносов в активном слое.

Введение

Актуальность. Исследование береговых процессов в реках, в частности, процесса береговой эрозии песчаного канала под действием протекающей в нём воды необходимо для решения множества прикладных задач, связанных с определением переноса донных отложений вдоль по течению реки и с вопросами долговечности прибрежных и речных сооружений, мостов, запруд, дамб, проектирования речных судоходных трасс и задач рыбоводства [1].

При изучении береговых процессов большое значение имеет выбор гидродинамической модели, описывающей характеристики речного потока, и выбор модели донно-береговых деформаций, позволяющей исследовать эволюцию створа русла во времени. И хотя в рассматриваемой проблеме – исследовании береговых процессов – для решения практических задач необходим комплексный подход к выбору данных моделей, исторически каждой из них посвящено отдельное направление исследований.

Так, например, не претендуя на полноту обзора, можно отметить, что исследованием гидродинамических моделей в речных створах занимались такие отечественные ученые как Розовский, Макавеев, Великанов, Гришанин, Потапов, Беликов и другие ученые. Из зарубежных ученых можно отметить Кеннеди, Икеду, Паркера, Роди.

Сформулировано достаточно много математических моделей для речного створа Figueres [2], Kean [3], Shu-Qingyang [4], Mohammadi [5], позволяющих определять характеристики речного потока без учета вторичных течений в створе, обзор по которым можно получить в работе [2]. Ряд ученых занимался изучением потока в створе реки с учетом вторичных течений Макавеев [6], Розовский [7], Потапов [8], показав их важность при моделировании береговых деформаций створов. Значительный вклад в исследование данного направления внесен, в основном, отечественными

учеными В. М. Маккавеевым [6], М. В. Потаповым [8], И. Л. Розовским [7], К. В. Гришаниным [9] и многими другими.

Существует немало работ, исследующих вторичные циркуляционные течения в трехмерных модельных каналах Gholami [10], Huange [11], Stoesser [12] однако, данные подходы крайне дороги по вычислительным ресурсам [10] и неприемлемы для расчета эволюционных русловых процессов в масштабах реальных прикладных задач.

Плановые модели движения осредненного по глубине речного потока позволяют достаточно хорошо определять осредненные скорости потока и глубину реки Struiksmā [13], но не могут воспроизводить вторичную циркуляцию в створах реки.

Однако, несмотря на значительные успехи в понимании гидродинамических процессов, протекающих в створах канала Маккавеев [6], Розовский [7], Караушев [14], Потапов [8], Доманевский [15], Беликов [16], вопрос о математических моделях, позволяющих находить искомые поля в створе канала, остается открытым. Поэтому в данной работе одним из направлений исследования выбрана задача по формулировке и валидации новых математических моделей для створов прямых и изогнутых каналов.

С другой стороны, не претендуя на полноту обзора, можно отметить, что построением моделей русловых деформаций занимались такие отечественные ученые как Великанов, Гришанин, Петров, Леви, Караушев, Шуляк и другие. Из зарубежных ученых можно отметить Эйнштейна, Петер-Мейера, Бэгнольда, Бэйларда, Икеду, Паркера, Питлика.

Первые попытки построения строгих математических моделей для определения формы поперечного сечения русла восходят к работам [17, 18, 19], в которых были предложены эвристические модели, позволившие получить качественные оценки изучаемого процесса. Дальнейшее развитие теории [20, 21, 22] было связано с большим количеством экспериментальных

работ [10, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32], численных исследований [2, 33]. Были предложены математические модели, учитывающие различные механизмы переноса донного материала, путем влечения по дну, взвешивания частиц донного материала в речном потоке и лавинного движения донных частиц при обрушении берегов [23, 24, 25, 32, 34, 35]. Однако, применение в них феноменологических формул транспорта донного материала позволило лишь качественно описывать процессы береговой эрозии. В работах Петрова П.Г, Петрова А.Г, [36, 37] были предложены и развиты Петрова А.Г, Потапова И.И. [38] аналитические формулы транспорта донного материала, не содержащие в себе феноменологических коэффициентов. В работах [39, 40] предложены математические модели для изучения процессов береговых деформаций русла при постоянном расходе речного потока.

В данной работе предложен ряд моделей береговой эрозии с учетом возможного изменения расхода транзитных наносов во времени. Поскольку характерное время установления гидродинамических параметров потока много меньше характерного времени изменения его расхода [39], гидродинамический поток описывается в рамках квазистационарного приближения. Модели могут учитывать потерю массы в створе канала за счет введения поправки на ненулевой градиент транзитного расхода вдоль оси канала. Турбулентная вязкость потока изменяется во времени из-за изменений геометрии расчетной области, уровня свободной поверхности потока и расхода потока. Для описания изменения донных и береговых отметок русла используется аналитическая модель движения наносов, предложенная в работах [39].

Цель настоящей работы заключается в разработке математических моделей течения речного потока в створах русла, моделей береговой эрозии, разработка алгоритмов расчета гидродинамических и русловых потоков, их верификации путем решения частных задач и получении новых численных закономерностей при исследовании береговых процессов.

Основными задачами работы являлись:

1. Разработка математической модели, описывающей движение спокойного речного потока в створе деформируемого русла с учетом и без учета вторичных течений в декартовой и цилиндрической системах координат;
2. Разработка информационной системы "Амур" и обработка данных натурных наблюдений с применением инструментария данной системы;
3. Валидация математической модели движения спокойного речного потока в створе цилиндрического русла в переменных скорость, вихрь - функция тока для модельных каналов и естественных русел;
4. Получение численных закономерностей формирования русла канала различной исходной топологии, учитывающих влияние характера гидродинамического потока, изменяющегося во времени, физико-механических и гранулометрических характеристик русла.

Научную новизну представляют:

1. Математическая модель, описывающая движение спокойного речного потока в створе деформируемого русла с учетом и без учета вторичных течений в декартовой и цилиндрической системах координат;
2. Выявленные закономерности изменения геометрии речных створов с течением времени, основанные на анализе данных натурных наблюдений;
3. Математическая модель эволюции песчаной или песчано-гравийной донно-береговой поверхности в створе русла, учитывающая физико-механические и гранулометрические параметры донного материала, не содержащая феноменологических параметров;
4. Численные закономерности, полученные при изучении береговых процессов в створах рек под воздействием речного потока при различных физико-механических и гранулометрических характеристиках русла.

Положения, выносимые на защиту:

- математическая модель движения спокойного речного потока в створе деформируемого русла с учетом и без учета вторичных течений в декартовой и цилиндрической системах координат, и результаты ее валидации, полученные в створах каналов Розовского, Блокланда и реки Десна;
- закономерности изменения геометрии речных створов во времени для р. Амур в окрестностях г. Хабаровска, полученные из обработки данных натурных наблюдений за период с 2005 по 2025 гг.;
- результаты валидации математических моделей эволюции створа русла для каналов Икеды, Базарова, Питлика и протоки Пемзенской.

Публикации. По результатам диссертационной работы автором опубликовано 15 научных работ, из них 8 статьи в журналах, входящих в список ведущих периодических изданий ВАК [41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 56].

Практическую значимость представляет интеграция математических моделей и алгоритмов расчета в информационную систему «Амур» с открытым исходным кодом. «Амур» может использоваться для проектирования гидротехнических сооружений, прогнозирования эволюции русла с песчаным и песчано-гравийным основанием, может быть рекомендована к использованию в институтах водных и экологических проблем, Государственном гидрологическом институте, Росгидрометцентре, Министерстве природных ресурсов Хабаровского края.

Достоверность результатов обеспечена применением современной теории математического моделирования русловых процессов, методов, созданных на основе современной теории дифференциальных и интегральных уравнений. Валидация моделей осуществлялась путем сравнения расчетных и экспериментальных данных.

Апробация работы. Предложенные математические модели, алгоритмы решения задач и разработанные программные комплексы проходили апробацию в лаборатории "Вычислительная механика" в ХФИЦ ВЦ ДВО

РАН при работе над тематикой лаборатории. Основные результаты работы были представлены на VI и VII международных научно-практических конференциях "Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления" (2021, 2023, 2025 гг., г. Хабаровск) [48, 49, 50], всероссийской конференции "Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач математической физики", посвященной памяти К. И. Бабенко (2022 г., г. Москва) [51], всероссийской конференции молодых ученых-механиков (2022 г., г. Сочи) [52], XIII всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (2023 г., г. Санкт-Петербург)[53], международного симпозиума "Неравновесные процессы в сплошных средах" (Пермь, 2024) [54].

Краткое содержание диссертационной работы по главам.

В первой главе сформулирована математическая постановка для модели эволюции донно-береговой поверхности песчаного канала под действием проходящего через створ русла спокойного, развитого турбулентного потока в цилиндрической и декартовой системах координат, с учетом и без учета вторичных течений. Для исследования береговых процессов выполнено замыкание гидродинамических моделей моделью эволюции донно-береговой поверхности русла для створа русла, перпендикулярного характерному направлению потока. Выполнен обзор алгебраических моделей определения турбулентной вязкости в створе русла канала. Для случаев с непостоянным полем турбулентной вязкости рассмотрено получение преобразованной постановки в переменных “вихрь - функция тока” с уравнениями в консервативной форме. Описана применяемая в работе аналитическая модель движения донного материала, не содержащая феноменологических параметров, учитывающая транзитные, гравитационные и напорные механизмы движения донного материала.

Во второй главе представлено описание информационной системы “Амур”, разработанной автором для хранения, обработки и анализа большого объема полученных в ходе проведения экспедиций натурных данных,

представляющих собой десятки тысяч записей, характеризующих динамику речных русловых и береговых процессов. Инструментарий информационной системы предоставляет возможности на основе имеющихся данных строить цифровые модели донного и берегового рельефов исследуемых участков реки и затем выполнять анализ русловых процессов за разные периоды времени из числа тех, в которые проводились натурные наблюдения.

Для построения цифровых моделей русла за конкретные временные периоды и, соответственно, расчетных областей для решения задач гидродинамики и береговых деформаций применялся метод триангуляционного покрытия с определением уровней дна русла в вершинах триангуляционной сетки с последующим ее сгущением.

На основе данных натурных наблюдений для правого берега острова Большой Уссурийский проведен анализ русловых процессов и получены численные закономерности по эрозии берегового склона;

В третьей главе для валидации математической модели, предложенной в первой главе, рассмотрено решение трех групп задач в створе русла с учетом вторичных течений. Задачи решались в створах лотковых каналов Розовского, Блокланда и натурных створах реки Десна. При решении задач для турбулентного замыкания модели гидродинамики использовалась алгебраическая модель Лео ван Рейна. Выполнен анализ результатов численных исследований, который показал в целом хорошую согласованность полученных решений с известными экспериментальными данными. Полученные результаты численных исследований подтвердили возможность использования предложенной модели для моделирования движения речного потока в плоскости створа канала.

В четвертой главе для валидации русловой составляющей математической модели, предложенной в первой главе, рассмотрено решение двух групп задач донно-береговых деформаций в створе русла, без учета вторичных течений в створе. В первой группе задач рассмотрены процессы

донно-береговых деформаций в трапециевидных створах (Икеда, Базаров, Питлик) с постоянным и переменным расходом. Во второй группе, выполнено ретроспективное моделирование размыва правого берега протоки Пемзенской в створе прорана переливной запруды.

Показано, что при решении задач береговой эрозии в створах каналов на больших временных интервалах важен учет расходов наносов по оси канала. Во всех контрольных створах наблюдался унос или нанос донного материала на больших промежутках времени, что указывает на квазистационарный характер гидродинамических процессов.

Для учета данного явления в уравнении Экснера предложенной модели был добавлен член в правой части уравнений, позволяющий регулировать процесс заиления или размыва створа.

Глава 1 Общая математическая постановка задачи

1.1. Описание физического явления и математическая постановка

В данной главе формулируется математическая модель движения спокойного $Fr < 1$ развитого турбулентного потока $Re > 10^4$ в створе кругового или прямого канала. Схема расчетной области приведена на рис. 1.1.

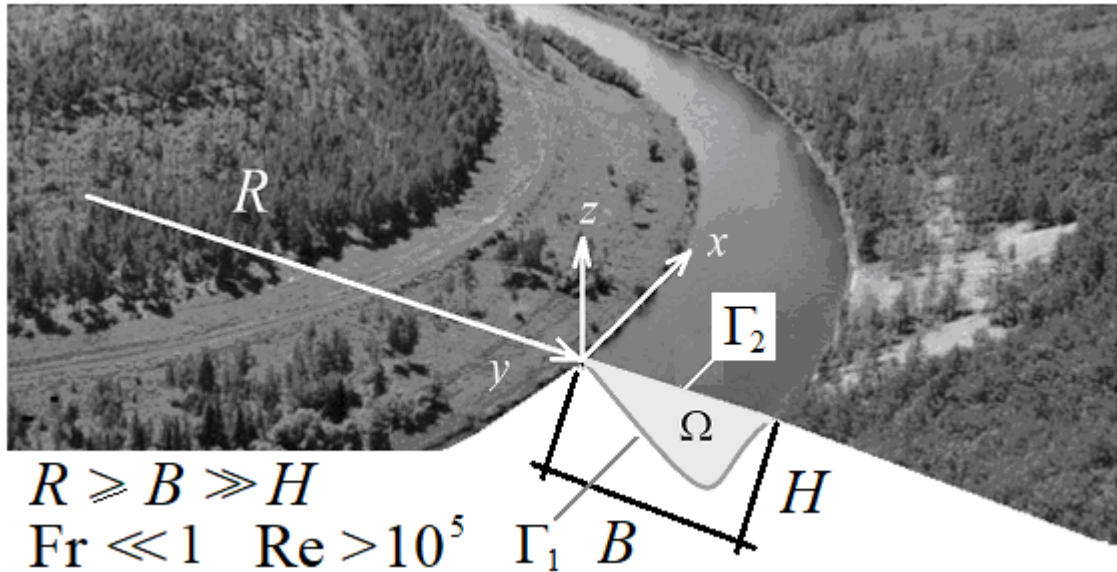


Рисунок 1.1 – Геометрия расчетной области Ω и ее границ Γ_k

В силу того, что решение задачи в трехмерной постановке является чрезвычайно затратным по времени и необходимым вычислительным мощностям, при решении практических задач, как правило, исследователи прибегают к упрощению модели [16, 38].

В данной работе ключевое внимание уделяется задачам в створах русла, которые определяются рядом условий [7, 27, 45, 55], предъявляемых к форме русла, при выполнении которых возможно решение задачи. Основное условие связано с тем, что речной поток имеет одно характерное направление, вдоль которого скорости потока не меняются или меняются слабо, и данными изменениями можно пренебречь. Это условие предполагает возможность выполнения уравнения неразрывности в плоскости створа и позволяет определить характеристики потока, рассмотрев решение задачи в

сечении русла, перпендикулярном характерному направлению потока. Например, направив ось x по характерному направлению потока.

Поскольку характерное время установления гидродинамических параметров потока много меньше характерного времени изменения его расхода [42, 56, 57], гидродинамический поток описывается в рамках квазистационарного приближения. Турбулентная вязкость потока изменяется во времени из-за изменений геометрии расчетной области, уровня свободной поверхности потока и расхода потока. Для описания изменения донных и береговых отметок русла используется аналитическая модель движения наносов, предложенная в работах [42, 56, 57].

Из сделанных выше предположений допускаем двумерную идеализацию с учетом гипотезы

$$U = U(y, z), \quad V = V(y, z), \quad W = W(y, z). \quad (1.1)$$

В связи с тем, что движение потока на закруглении русла подчиняется условию $R \geq B \gg H$ (радиус закругления русла больше либо равен ширине канала, которая, в свою очередь, существенно больше глубины) [7], величиной поперечных уклонов свободной поверхности потока можно пренебречь, считая что нормаль к поверхности потока в створе совпадает с ортом оси z : $\vec{n} = (0, 0, 1)$, если о противном не сказано дополнительно.

Для большинства практических задач [57, 58] речной поток в створе канала Ω можно считать установившимся, что подразумевает неизменность искомых осредненных характеристик потока во времени, таких как скорость, вязкость и давление.

Предполагая, что установившийся поток в створе канала зависит только от координат створа $U = U(y, z)$, $V = V(y, z)$, $W = W(y, z)$, $P = P(y, z)$, нормаль к свободной поверхности потока $\vec{n} = (0, 0, 1)$ коллинеарна вертикальной координатной оси z и на свободной поверхности потока

заданные окружные U_η и радиальные V_η скорости, из уравнений Рейнольдса [7, 20] получим для речного гидродинамического потока в створе следующую математическую постановку

$$\rho \left(V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \sigma \frac{VU}{y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \sigma \left(\mu_e \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U}{y} \right) - \frac{\partial \mu_e}{\partial y} \frac{U}{y} \right) + Q_x, \quad (1.2)$$

и задачу определения вторичных скоростей в створе

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} - \sigma \frac{U^2}{y} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \sigma \mu_e \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V}{y} \right) + \frac{\partial \mu_e}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \mu_e}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial y} + Q_y, \quad (1.3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial W}{\partial t} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \sigma \frac{\mu_e}{y} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial \mu_e}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \mu_e}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - Q_z, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} + \sigma \frac{V}{y} = 0. \quad (1.5)$$

где U, V, W – осредненные скорости речного потока в створе канала, $Q_x = \rho g J_x, Q_y = \rho g J_y, Q_z = \rho g$ – объемные силы, J_x, J_y – средние уклоны речного русла в плане потока, g – ускорение свободного падения, $\mu_e = \mu_0 + \mu_t$ – эффективная вязкость потока, μ_0 – молекулярная вязкость потока, μ_t – турбулентная вязкость потока, ρ – плотность воды, P – давление в жидкости. Здесь и ниже уравнения описывают движение речного потока в цилиндрической системе координат при $\sigma = 1$ для кругового канала и в декартовой системе координат при $\sigma = 0$ для прямого канала.

Граничные условия для данных задачи имеют вид:

- на свободной поверхности речного потока

$$U = U_\eta, \quad V = V_\eta, \quad y, z \in \Gamma_2 \quad (1.6)$$

- на донно-береговой поверхности

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad y, z \in \Gamma_1 \quad (1.7)$$

Задача (1.2) - (1.7) допускает дополнительные упрощения [42], например, если объемные силы Q_y, Q_z равны нулю и вторичными течениями, характеризуемыми компонентами поля скорости V, W , можно пренебречь $V = 0, W = 0$. Система уравнений (1.2) - (1.5) при этом сокращается до [24, 38, 59, 60]:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial z} \right) + Q_x = 0 \quad y, z \in \Omega. \quad (1.8)$$

С учетом $\vec{n} = (0, 0, 1)$ граничные условия (1.29) - (1.31) на свободной поверхности речного потока примут вид

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad y, z \in \Gamma_2 \quad (1.9)$$

На донно-береговой поверхности

$$U = 0 \quad y, z \in \Gamma_1 \quad (1.10)$$

1.2. Движение речного потока в створе русла в переменных вихрь – функция тока

Рассмотрим преобразование задачи (1.2) - (1.5) с граничными условиями (1.6) - (1.7) к постановке в переменных “вихрь-функция тока”. Для этого введем скалярную функцию тока Φ , для которой справедливы тождества:

$$V = \frac{1}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad W = -\frac{1}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (1.11)$$

Выполним стандартную операцию исключения из уравнений (1.3), (1.4) функции давления (дифференцируем уравнение (1.4) по y , уравнение (1.3) по z и из второго уравнение вычитаем первое:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \sigma \frac{1}{y} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial \mu_e}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \mu_e}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) \right) - \left(-\rho g - \rho \left(\frac{\partial W}{\partial t} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial z} \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V}{y} \right) \right) + 2 \frac{\partial \mu_e}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \mu_e}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right) - \left(-\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} - \sigma \frac{U^2}{y} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.12)$$

где $\mu = \mu_0 + \mu_t$ - приведенная вязкость. Вводя подстановку для функции вихря

$$\omega = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1.13)$$

упростим уравнение (1.12) до вида

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(\frac{\rho}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} - \left(\frac{\rho}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \frac{\partial \omega}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \sigma \frac{\omega}{y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + Q_\omega \quad (1.14)$$

где

$$Q_\omega = -\sigma \left(\frac{\rho}{y} \frac{\partial U^2}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right) +$$

$$-2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right) \quad (1.15)$$

Уравнение (1.14) является первым уравнением в математической постановке задачи гидродинамики, формулируемой в переменных Φ, ω . Данное уравнение обобщает аналогичное уравнение, получаемое для задач с постоянной вязкостью

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\rho}{y^\sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\omega}{y} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) - \sigma \left(\frac{\rho}{y} \frac{\partial U^2}{\partial z} \right). \quad (1.16)$$

Второе уравнение постановки можно получить, исключив с помощью (1.11) функции скорости из уравнения (1.13)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \omega = 0 \quad (1.17)$$

или

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + y^\sigma \omega = 0. \quad (1.18)$$

Таким образом, с учетом подстановки (1.11) в (1.13) постановка задачи гидродинамики (1.2) - (1.5) преобразуется в эквивалентную постановку, формулируемую в переменных Φ, ω :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(\frac{\rho}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} - \left(\frac{\rho}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \frac{\partial \omega}{\partial z} = \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \sigma \frac{\omega}{y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + Q_\omega \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + y^\sigma \omega = 0, \quad (1.20)$$

в которой, уравнения (1.19) - (1.20) замыкаются граничными условиями

$$\omega = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \in \Gamma_1, \quad \omega = 0 \in \Gamma_2, \quad (1.21)$$

$$\Phi = 0 \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = V_\eta, \quad (x, y) \in \Gamma_2 \quad (1.22)$$

и начальными условиями

$$\omega = \omega_0 \quad t = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad . \quad (1.23)$$

1.3. Алгебраические модели турбулентной вязкости

При турбулентном режиме непосредственно действием молекулярной вязкости не могут быть уравновешены действующие силы и механизм движения описывается сложной системой уравнений даже для наиболее простого плоского потока. Можно попытаться обойти эту сложность тем, что вместо скалярной, физически совершенно определенной и ясной величины динамической вязкости ввести условную «турбулентную» вязкость.

Для определения турбулентной вязкости в створе русла исследователи применяли различные модели [61, 62, 63, 64, 65, 66], которые можно условно подразделять на алгебраические и дифференциальные. Наиболее простыми для решения задач гидродинамики (1.2) - (1.7) являются модели с постоянной турбулентной вязкостью.

Специфика задачи определения гидродинамических характеристик в створе русла позволяет в ряде случаев использовать простейшие турбулентные алгебраические модели для определения турбулентной вязкости потока. Такие модели основаны на гипотезе Прандтля о пути смешения [67, 68, 69], под которым понимается характерный размер вихрей в турбулентном течении. Прандтль вывел соотношение для определения турбулентной вязкости, имеющее вид:

$$\mu_t = \rho_w l^2 \left| \frac{dU}{dz} \right|, \quad (1.24)$$

где l - длина пути смешения (характерный размер вихря), ρ_w - плотность воды, U - скорость потока.

В дальнейшем на основе данной модели Прандтля многие исследователи, делая различные предположения о распределении скорости по глубине потока и характерном масштабе турбулентности, создавали различные алгебраические модели речной турбулентности.

Например, Базен и Буссинеск [7], используя квадратичную параболу в качестве профиля скорости, получили следующую зависимость для постоянной по створу турбулентной вязкости:

$$\mu_t = \frac{\rho_w U H}{2a} \frac{\sqrt{g}}{C}, \quad (1.25)$$

где ρ_w - плотность воды, U - средняя скорость потока, g - ускорение свободного падения, H - глубина потока, C - коэффициент Шези, a - коэффициент модели ($7 \leq a \leq 7,8$)

Караушев [14, 70], предполагая эллиптическое по вертикали распределение профиля скорости речного потока, определил турбулентную вязкость как функцию скорости потока:

$$\mu_t = \rho_w g \frac{UH}{MC}, \quad M = 0.7C + 1.92g, \quad (1.26)$$

где ρ_w - плотность воды, U - скорость потока, g - ускорение свободного падения, H - глубина потока, C - коэффициент Шези, M - зависящая от коэффициента Шези функция.

Прандтль и Карман [71, 72] на основе логарифмического распределения скорости потока по глубине получили параболическое распределение турбулентной вязкости μ_t :

$$\mu_t = \rho_w \kappa H U \frac{\sqrt{g}}{C} \left(1 - \frac{z}{H}\right) \frac{z}{H}, \quad (1.27)$$

где ρ_w - плотность воды, κ - постоянная Кармана (~ 0.41), U - средняя скорость потока, g - ускорение свободного падения, H - глубина потока, C - коэффициент Шези.

Абси [73, 74, 75, 76], основываясь на распределении турбулентной кинетической энергии пульсаций по глубине потока, получил несколько

экспоненциальных зависимостей для определения турбулентной вязкости, коэффициенты которых зависели от числа Рейнольдса потока Re .

- профиль турбулентной вязкости Рафик Абси (Rafik Absi)

$$\mu_t = \rho_w u_* z C_\alpha \exp\left(-C_1 \frac{z}{H}\right) \quad (1.28)$$

- профиль турбулентной вязкости Рафик Абси (Rafik Absi) с поправкой

$$\mu_t = \rho_w u_* \kappa z C_\alpha \exp\left(-C_1 \frac{z}{H}\right) \left(1 - \exp\left(-B_f \left(1 - \frac{z}{H}\right)\right)\right), \quad (1.29)$$

$$\text{где } C_\alpha = \exp\left(-\frac{0.34Re_* - 11.5}{0.46Re_* - 5.98}\right), \quad C_1 = \frac{Re_*}{0.46Re_* - 5.98}, \quad B_f = 6, \quad Re_* = Hu_* / \nu.$$

Можно также без дополнительных комментариев привести следующие популярные алгебраические модели распределения турбулентной вязкости по глубине потока, которые являются вариациями от уже приведенных моделей.

- Параболическая модель В. Шмидта[77]:

$$\mu_t = \rho_w u_* \kappa \left(1 - \frac{z}{H}\right) z. \quad (1.30)$$

- параболическая модель Великанова[78]:

$$\mu_t = \rho_w u_* \kappa \left(1 - \frac{z}{H}\right) (d + z), \quad (1.31)$$

- параболическая модель Великанова с поправкой Коулза [78]:

$$\mu_t = \rho_w \frac{u_* \kappa (d + z) \left(1 - \frac{z}{H}\right)}{1 + \pi P \frac{z}{H} \sin\left(\pi \frac{z}{H}\right)},$$

$P \approx 0.2$ - параметр Коулза[79]

- профиль турбулентной вязкости ван Дриста (van Driest)[80]:

$$\mu_t = \rho_w u_* \kappa z \left(1 - \exp\left(-\frac{z^+}{A_{vd}}\right) \right), \quad A_{vd} = 26 \quad (1.32)$$

Следует отметить, что алгебраических формул для определения турбулентной вязкости значительно больше, чем приведено в данной работе. Часть этих зависимостей модифицирована в работах различных авторов [6, 78, 80, 81, 82, 83, 84]. Однако, несмотря на вековую историю изучения проблемы, до настоящего времени не существует единого мнения даже по характеру распределения турбулентной вязкости по глубине потока. С одной стороны, согласно экспериментам, приведенным в работах Роди [81], Великанова [78, 85], по глубине потока реализуется параболическое или близкое к нему распределение турбулентной вязкости по глубине потока, что отражается, например, зависимостями (1.31, 1.32). С другой стороны, экспериментальные данные по турбулентной диффузии для взвесенесущих потоков показывают, что она не стремится к нулю. А поскольку турбулентные диффузия и вязкость потока связаны через слабо изменяющееся число Прандтля [81], то турбулентная вязкость на свободной поверхности потока не должна стремиться к нулю, что отражается в моделях Караушева, ван Рейна [86, 87, 88, 89], Абси. Следует также отметить, что в различных алгебраических моделях определения турбулентной вязкости не все авторы считают, что логарифмический турбулентный слой развивается на полную глубину потока. Например, в моделях ван Рейна [88, 89, 90] логарифмический слой распространяется от дна русла на расстояние от 0.2 до 0.5 от глубины потока.

$$\mu_t = \kappa u_* H(y) \begin{cases} (1-\chi)\chi, & \chi \leq 0.5, \\ 0.25, & \chi > 0.5 \end{cases} \quad u_* = \sqrt{T/\rho_w}, \quad \chi = \frac{z}{H(y)}, \quad (1.33)$$

В качестве примера на рис. 1.2 приведены кривые распределения турбулентной вязкости по глубине потока, полученные для моделей различных авторов.

Из приведенных графиков, к сожалению, следует, что теоретически на данный момент нет возможности выбора наиболее оптимальной модели турбулентной вязкости для речного потока. При этом наиболее актуальной при решении конкретных задач будет та модель, которую можно валидировать с помощью экспериментальных данных для конкретной изучаемой задачи.

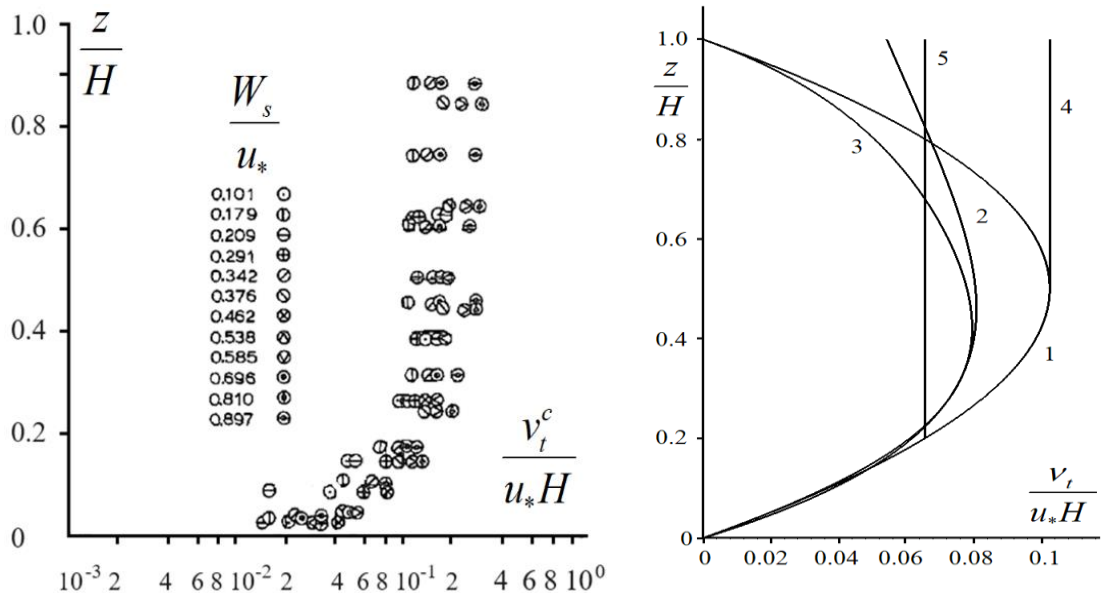


Рисунок 1.2 – Распределение турбулентной диффузии по вертикали (слева). Распределение турбулентной вязкости для различных турбулентных моделей (справа): 1- Шмидта, Великанова, Прандтля-Кармана; 2 - Абси; 3 – Коулса, Роди; 4 и 5 – ван Рейна

1.4. Модель русловых деформаций в створе русла

Для исследования береговых процессов необходимо выполнить замыкание гидродинамических моделей, рассмотренных в предыдущих параграфах, моделью эволюции донно-береговой поверхности русла.

В соответствии с гипотезами для задачи гидродинамики, описанными ранее в пункте 1.1, рассматриваем решение задачи береговой эволюции в сечении русла, перпендикулярном характерному направлению потока, пренебрегаем изменениями скорости вдоль характерного направления потока, вторичными токами.

При замыкании будем полагать, что характерное время установления гидродинамического потока на порядки меньше времени характерного времени изменения донно-береговой поверхности [58]. В связи с чем движение речного потока для рассматриваемого класса задач всегда можно описывать в рамках стационарного или квазистационарного приближения [58]. Поскольку в данной работе русловые процессы исследуются в створах рек – доминирующее влияние на изменения береговой линии русла оказывают влекомые наносы [39]. Однако, при учете вторичных течений в створе русла влияние взвешенных наносов также может быть значительным, в особенности, при формировании выпуклого (пологого) берега русла [91, 92].

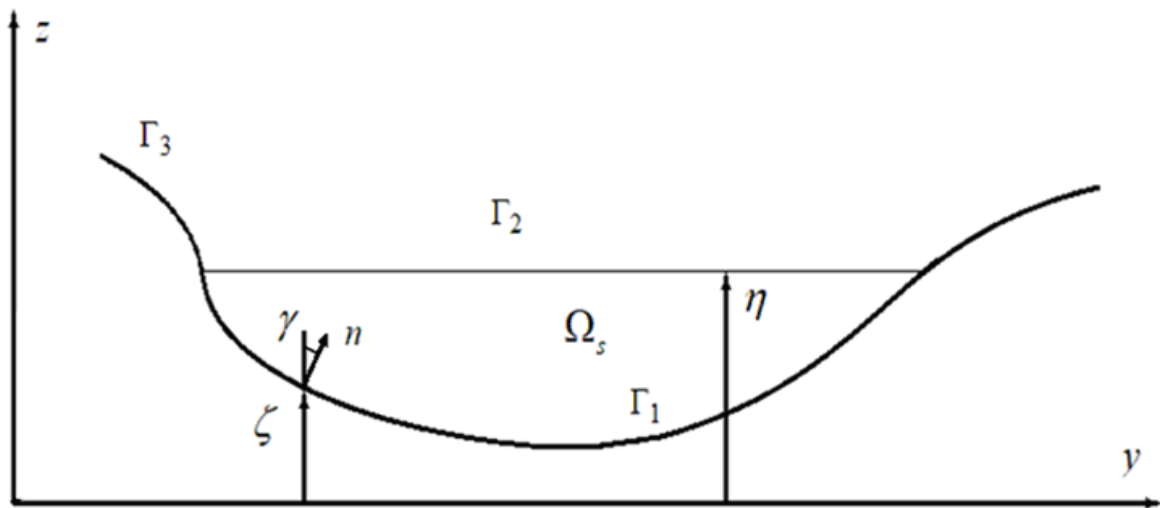


Рисунок 1.3 – Схема расчетной области Ω в створе русла и его границ

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \text{ сухая береговая линия русла } \Gamma_3$$

В работах различных авторов используются преимущественно феноменологические модели движения влекомых наносов, обзор которых

был выполнен в монографии [38]. В данной работе применяется аналитическая модель движения донного материала [38, 93]. Модель не содержит в себе феноменологических параметров, учитывает транзитные, гравитационные и напорные механизмы движения донного материала.

Математическая модель эволюции донно-береговой поверхности русла $z = \zeta = \zeta(t, x, y)$, схематично изображенного на рис. 1.3, включает в себя уравнение Экснера [94]:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial G_y}{\partial y} = q_x \quad (1.34)$$

$$G_y = -\Lambda \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (1.35)$$

Уравнение (1.34) замыкается начальными и граничными условиями

$$\zeta(0, y) = \zeta_0(y), \quad 0 \leq y \leq W, \quad t = 0, \quad \eta = \eta(0), \quad (1.36)$$

$$\zeta(y_L, t) = \eta(t), \quad \zeta(y_R, t) = \eta(t), \quad 0 \leq t \leq T_S, \quad (1.37)$$

где $\alpha_H = 0.5$, $\alpha_\theta = 1.2$, $N = 6$ - параметры модели, H_0 - режимная глубина невозмущенного запрудой русла [17]. Коэффициенты уравнения донных деформаций (1.34) определялись по модели [38]

$$\Lambda = G_0 T \frac{\sqrt{T} - \sqrt{T_c}}{g \rho_w \sqrt{\rho_w} \cos \gamma \max(0.01, 1 - \Gamma^2)}, \quad (1.38)$$

$$T_{0c} = \frac{8}{9} \frac{\rho_b \tan \varphi}{c_x} \rho_w g d_{50}, \quad \tan \gamma = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \cos \gamma = 1 / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2}, \quad \Gamma = \frac{\tan \gamma}{\tan \varphi},$$

$$T_c = T_{0c} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2} \right)^{-1} \sqrt{1 - \Gamma^2}, \quad G_0 = \frac{16}{15} \frac{1}{\kappa_d \rho_b (\tan \varphi)^2}, \quad \rho_b = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w}.$$

В уравнение (1.34) добавлена правая часть q_x , ответственная за режимный баланс донного материала в деформируемом створе русла [95]

$$q_x = \alpha_H \frac{G_0}{H_0} \max \left(0, 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T}} \right) \left(\frac{(\eta_0 - \zeta) - H_0}{H_0} \right) \left(1 - \frac{1}{\tan \varphi} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right| \right)^N, \quad (1.39)$$

$$H_0 = \frac{\alpha_\theta \rho_b \tan \varphi}{J} d_{50}, \quad (1.40)$$

Здесь $\eta = \eta(t)$, $\zeta = \zeta(t, y)$ – отметки свободной поверхности потока и донной поверхности русла соответственно, T_{0c} – критическое придонное касательное напряжение на ровном дне, ρ_s – плотность песка, φ – угол внутреннего трения донных частиц, γ – острый угол между нормалью к поверхности дна ζ и вертикальной линией, c_x – лобовое сопротивление частиц, d_{50} – средний диаметр донных частиц, $\kappa = 0.41$ – коэффициент Кармана, κ_d – коэффициент Кармана для водогрунтовой смеси, ζ_0 – отметки дна в начальный момент времени.

1.5. Заключение по главе 1

Сформулирована общая математическая постановка для модели эволюции створа песчаного канала под действием проходящего через створ русла спокойного, развитого турбулентного потока. Описана двумерная идеализация для решения задач гидродинамики в рамках квазистационарного приближения, с учетом и без учета вторичных течений. Для случаев с непостоянным полем турбулентной вязкости рассмотрено получение преобразованной постановки в переменных “вихрь - функция тока” с уравнениями в неконсервативной форме.

Выполнен обзор алгебраических и дифференциальных моделей для определения турбулентной вязкости в створе русла канала.

Описано необходимое для расчета донных деформаций русла получение значений придонных сдвиговых напряжений в створе с использованием метода пристеночных функций.

Для исследования береговых процессов выполнено замыкание гидродинамических моделей моделью эволюции донно-береговой поверхности русла. С учетом принимаемых гипотез для задачи гидродинамики, описанных ранее, решение задачи береговой эволюции рассмотрено в сечении русла, перпендикулярном характерному направлению потока. Описан применяемый в работе алгоритм лавинного обрушения берега, одного из доминирующих механизмов переноса донного материала.

В работе применялась аналитическая модель движения донного материала, не содержащая в себе феноменологических параметров, учитывающая транзитные, гравитационные и напорные механизмы движения донного материала.

Глава 2 Выборка данных для валидации предложенных моделей

2.1. Обзор информационной системы «Амур»

С целью получения объективной информации о динамике изменения речного русла во времени ведется сбор данных о гидрологическом режиме исследуемых участков рек, значений физико-механических и гранулометрических характеристик донного материала, натуральных характеристик уровней воды, уклонов водной поверхности, средних скоростей, распределения расходов потока по рукавам русла, данные по глубинам.

В процессе сбора экспериментальных данных в ходе натуральных наблюдений с целью исследования береговых процессов появилась необходимость хранить большие объемы информации, описывающей рельеф речного русла, для последующего анализа. В 2018 г. автором при работе по гранту РФФИ № 18-05-00530 была разработана информационная система «Амур» для хранения и обработки натуральных экспериментальных данных о глубинах речного потока на контрольных участках реки Амур в окрестностях города Хабаровска [43, 44].

Первоначально в базу информационной системы были занесены данные о глубинах речного потока, полученные ЗАО "Ленгипроречтранс" [96, 97, 98] в ходе гидрологического мониторинга в районе Хабаровского водного узла в период с 2005 г. по 2008 г. Впоследствии, с 2018 г. база на регулярной основе пополнялась новыми данными гидрографических промеров глубин реки Амур. Полевые работы, проводимые сотрудниками лаборатории вычислительной механики ВЦ ДВО РАН (в том числе и автором).

Оконные формы, информационной системы «Амур» фрагментарно представлены на рис. 2.1. - 2.6, 2.9.

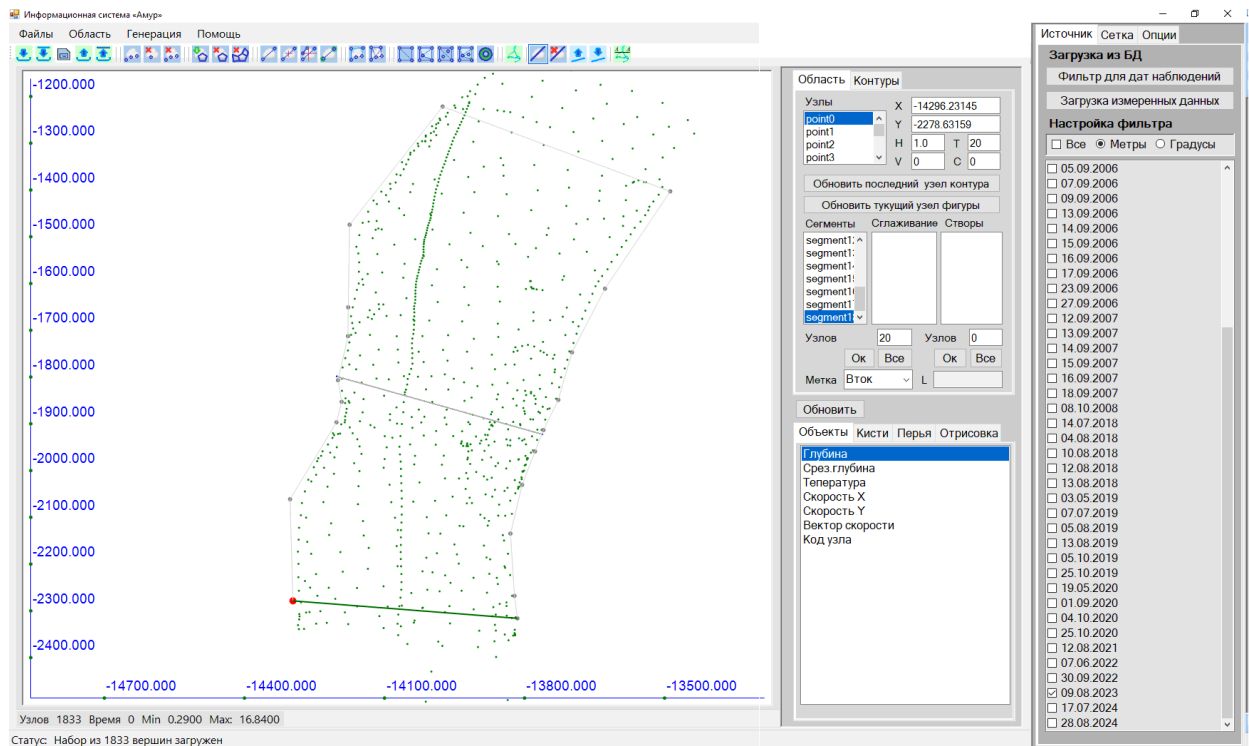


Рисунок 2.1 – Форма приложения ИС для определения створов на участке реки за период времени из числа тех, в которые проводились замеры

Инструментарий информационной системы «Амур» предоставляет возможность на основе имеющихся данных натурных наблюдений, в частности, данных о глубинах речного потока при известных значениях срезанной глубины строить цифровые модели рельефа донной поверхности смоченного участка русла для исследуемых участков реки и затем выполнять анализ русловых процессов за разные периоды времени из числа тех, в которые проводились экспедиции.

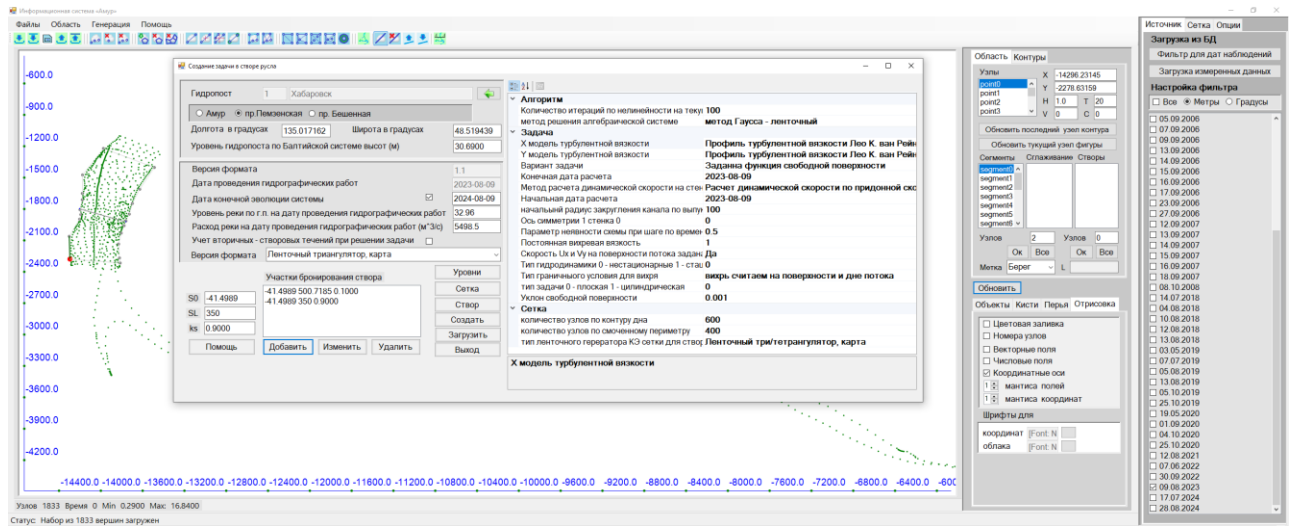


Рисунок 2.2 – Форма приложения ИС для постановки решаемой задачи в створе реки

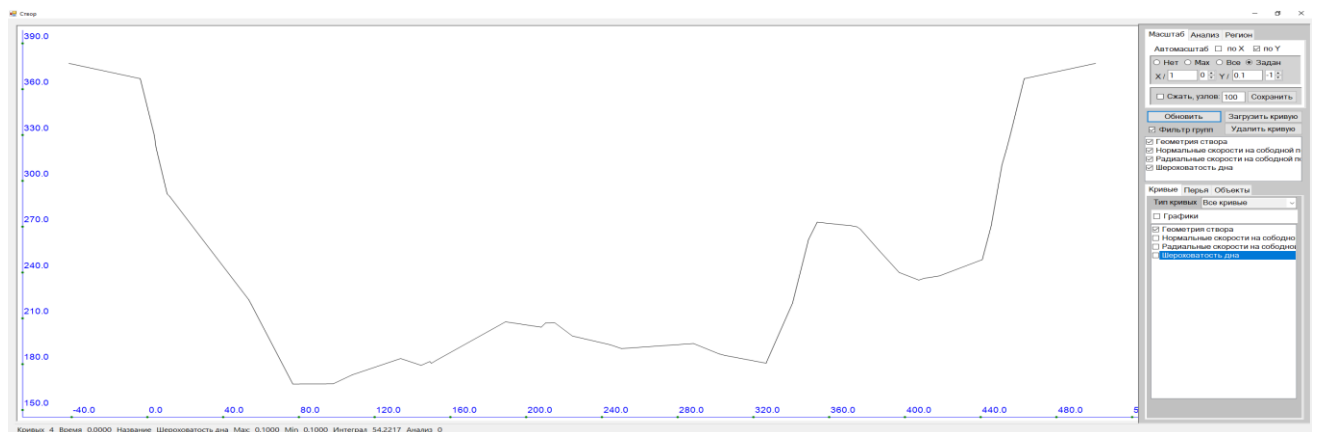


Рисунок 2.3 – Профиль заданного створа реки Амур

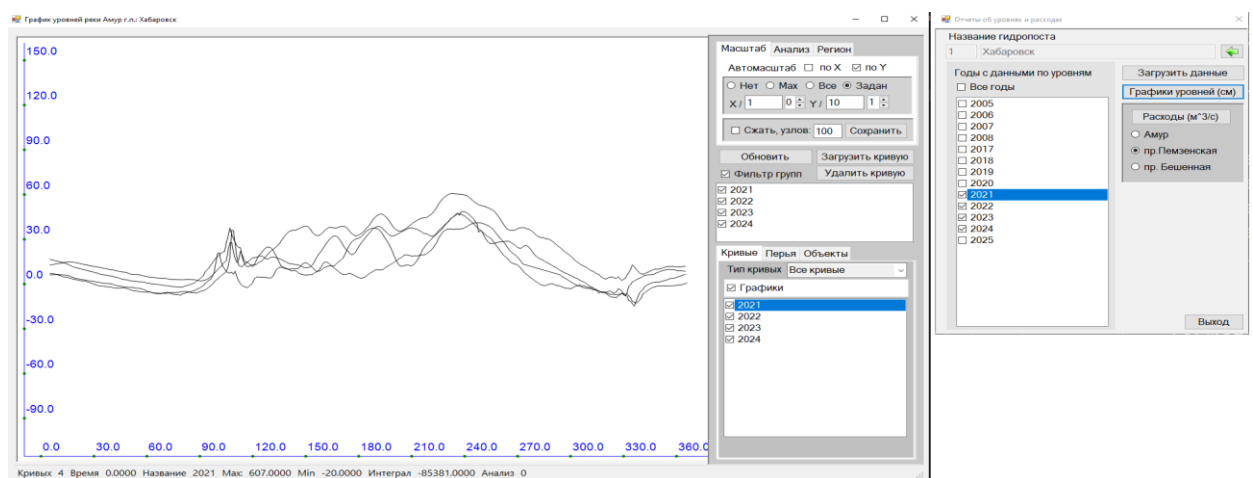


Рисунок 2.4 – График уровней реки Амур за выбранные периоды времени

Для построения цифровой модели применялся метод триангуляционного покрытия с определением уровней дна русла в вершинах триангуляционной сетки с последующим ее сгущением (см. рис. 2.9).

Форма списка узлов опорной сети

код	глубина	шаг	скорость	курс	дата и время	широта	долгота	температура
220697	11.12	92	33	37.3	28.08.2024 17:15	48.5552337673	135.0121912267	21.27
220698	9.27	91	33	39.4	28.08.2024 17:15	48.5558927525	135.0129486155	21.17
220699	9	91	33	40.4	28.08.2024 17:15	48.5565210599	135.0137285516	21.07
220700	5.66	90	32	41.9	28.08.2024 17:15	48.5571403988	135.0145248324	20.98
220701	4.68	89	32	45.4	28.08.2024 17:15	48.5577433091	135.0153428223	20.92
220702	5.05	89	32	43.2	28.08.2024 17:16	48.5583073273	135.0162068289	20.87
220703	5.58	88	32	49.4	28.08.2024 17:16	48.5588901211	135.0170346256	20.82
220704	5.51	84	30	57.2	28.08.2024 17:16	48.5594054405	135.0179417799	20.79
220705	5.44	44	16	61.1	28.08.2024 17:16	48.5598126333	135.0188970007	20.76
220706	5.41	19	7	60.8	28.08.2024 17:16	48.5600025672	135.0194163434	20.75
220707	4.87	16	6	70.6	28.08.2024 17:16	48.5600875597	135.0196465943	20.76
220708	4.43	16	6	72.7	28.08.2024 17:17	48.5601346666	135.0198492687	20.78
220709	3.94	14	5	68.5	28.08.2024 17:17	48.5601760726	135.0200504344	20.8
220710	3.31	12	4.3	78.1	28.08.2024 17:17	48.560222676	135.0202289689	20.82
220711	1.89	8	2.8	83	28.08.2024 17:17	48.5602448042	135.0203869678	20.84
220712	1.04	5	1.9	106.5	28.08.2024 17:17	48.56025327	135.0204918254	20.86
220713	0.35	2	0.6	139	28.08.2024 17:17	48.5602399427	135.02059635	20.89
220778	0.34	1	0.2	306.6	28.08.2024 17:28	48.5603039805	135.0206452142	21.34
220779	0.34	1	0.4	294.4	28.08.2024 17:28	48.5603066627	135.020639766	21.34
220780	0.3	1	0.5	305	28.08.2024 17:29	48.5603109375	135.0206255168	21.34
220781	0.34	1	0.4	270.9	28.08.2024 17:29	48.5603178106	135.0206106808	21.33
220782	0.35	0	0.1	258.2	28.08.2024 17:29	48.5603179783	135.0205951743	21.32
220783	0.35	1	0.4	276.6	28.08.2024 17:29	48.5603173077	135.0205903128	21.31
220784	0.33	0	0.1	290.1	28.08.2024 17:29	48.5603184812	135.0205749739	21.3
220785	0.34	0	0.1	90	28.08.2024 17:29	48.5603197385	135.0205697771	21.29
220786	0.33	1	0.3	159.2	28.08.2024 17:30	48.5603197385	135.0205727108	21.29
220787	0.34	1	0.3	125.5	28.08.2024 17:30	48.5603128653	135.0205766503	21.28
220788	0.33	0	0.1	17.3	28.08.2024 17:30	48.5603085067	135.0205858704	21.28
220789	0.34	0	0	180	28.08.2024 17:30	48.5603099316	135.0205855409	21.28

26 марта 2025 г. 26 марта 2025 г. OK

Рисунок 2.5 – Форма приложения ИС для хранения натурных данных, собранных в результате проведения экспедиций

Форма списка речных глубин по гидропостам

код	участок	дата и время	уровень воды	норма
1	Хабаровский водный у...	01.05.2017	-4	92
4	Хабаровский водный у...	08.02.2019 8:58	1	1
1561	Хабаровский водный у...	01.04.2018	-99	-140
1562	Хабаровский водный у...	02.04.2018 20:04	-88	-137
1563	Хабаровский водный у...	03.04.2018 20:45	-77	-135
1564	Хабаровский водный у...	04.04.2018 20:45	-67	-132
1565	Хабаровский водный у...	05.04.2018 20:46	-55	-121
1566	Хабаровский водный у...	06.04.2018 20:46	-42	-110
1567	Хабаровский водный у...	07.04.2018 20:46	-35	-99
1568	Хабаровский водный у...	08.04.2018 20:46	-24	-88
1569	Хабаровский водный у...	09.04.2018 20:47	-16	-77
1570	Хабаровский водный у...	10.04.2018 20:47	-7	-66
1571	Хабаровский водный у...	11.04.2018 20:47	13	-55
1572	Хабаровский водный у...	12.04.2018 20:47	35	-44
1573	Хабаровский водный у...	13.04.2018 20:47	53	-33

OK

Рисунок 2.6 – Форма приложения ИС для хранения данных об отметках речных глубин по гидропостам

2.2. Выборка данных натуральных наблюдений для тестирования моделей береговых процессов

В 2018 г. был проведен анализ русловых процессов для участка реки Амур между островами Кабельный и Большой Уссурийский. Пример используемой цифровой модели местности приведен на рис. 2.9. Данные по значениям руслоформирующего расхода Q , средней скорости потока u и максимальной скорости потока $u_{\max}$, реализующихся в основном русле р. Амур в период весенне-летнего паводка по годам, согласно работам по гидрологическому мониторингу [96, 97, 98] сведены в таблицу 2.1:

Таблица 2.1 – характеристики речного потока в основном русле р. Амур в период весенне-летнего паводка (2018 г.)

Год	Q , м ³ /с.	u , м/с.	$u_{\max}$, м/с.	T , сут.
2005	5300	0.88	1.23	63
2006	6900	0.9	1.3	61
2007	6530	0.9	1.27	65

В 2020 г. был выполнен анализ, показавший, что в окрестности слияния реки Амур и протоки Амурская происходят значительные деформации донного рельефа русла и берега острова Большой Уссурийский.

Пример оцифрованного фрагмента Хабаровского водного узла в окрестностях острова Большой Уссурийский (на 2006 г.) приведен на рис. 2.7. Изолиниями показана глубина потока. В ходе экспедиций проходы

судна, с которого производились промеры глубин, выполнялись через 150 – 200 м, примерно перпендикулярно динамической оси потока реки. Для контроля прибрежной донной поверхности выполнялись 4 – 6 проходов судна вдоль берегов реки, через 20 – 40 м. Во время промеров глубин велись наблюдения за уровнями воды по гидропосту «Хабаровск».

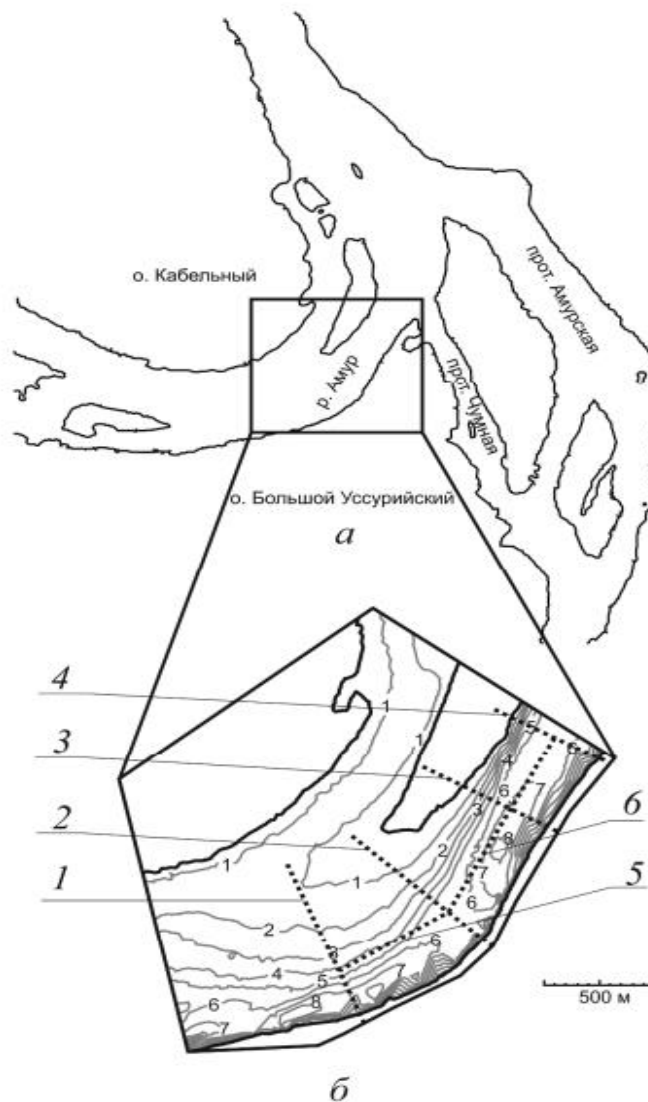


Рисунок 2.7 – Положение створов

На рис. 2.8 приведен оцифрованный фрагмент Хабаровского водного узла в окрестностях острова Большой Уссурийский. Изолиниями показана несрезанная глубина р. Амур между островами Большой Уссурийский и Кабельный на 12.08.2018 (ReefMaster2.0). Для анализа русловых деформаций

на рассматриваемом участке реки были определены три поперечных створа с координатами вершин створов, приведенных в таблице 2.2.

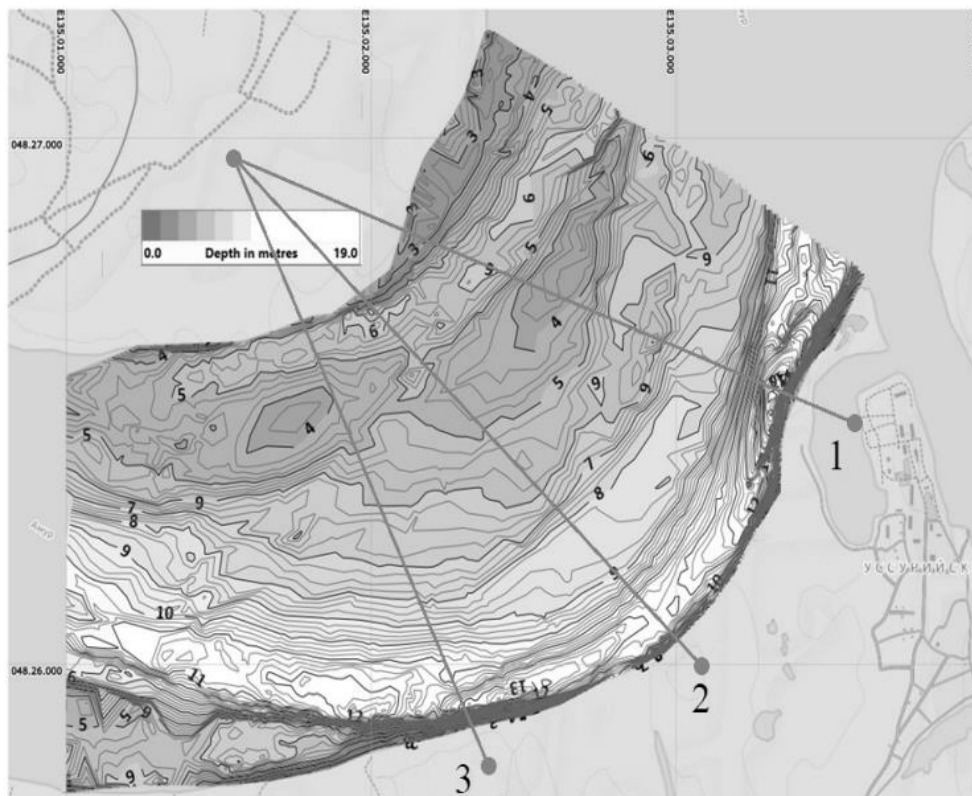


Рисунок 2.8 – Изолинии несрезанных глубин р. Амур между островами Большой Уссурийский и Кабельный, построенные по наблюдениям за 12.08.2018

Таблица 2.2 – координаты вершин створов для участка между островами Большой Уссурийский и Кабельный на 12.08.2018

Створ	Первая точка створа		Вторая точка створа	
	Долгота	Широта	Долгота	Широта
№1	135.061713065	48.4400746026	135.019475318	48.4496534457
№2	135.051198948	48.4331168359	135.019475318	48.4496534457
№3	135.036968634	48.4294473288	135.019475318	48.4496534457

На рис. 2.9 приведен пример окна информационной системы «Амур», используемого для задания створов, в которых проводится анализ изменений донной поверхности. В окне отображается триангуляция цифровой модели местности для исследуемого участка реки за 2018 г. и показан створ № 1.

Перейдем к более детальному рассмотрению процессов деформации донной поверхности и правого берега реки Амур в створах реки, определенных в таблице 2.2. На рис. 2.10 для створа № 1 приведены восстановленные профили срезанных глубин за периоды 2005-2008 и 2018-2019 гг.

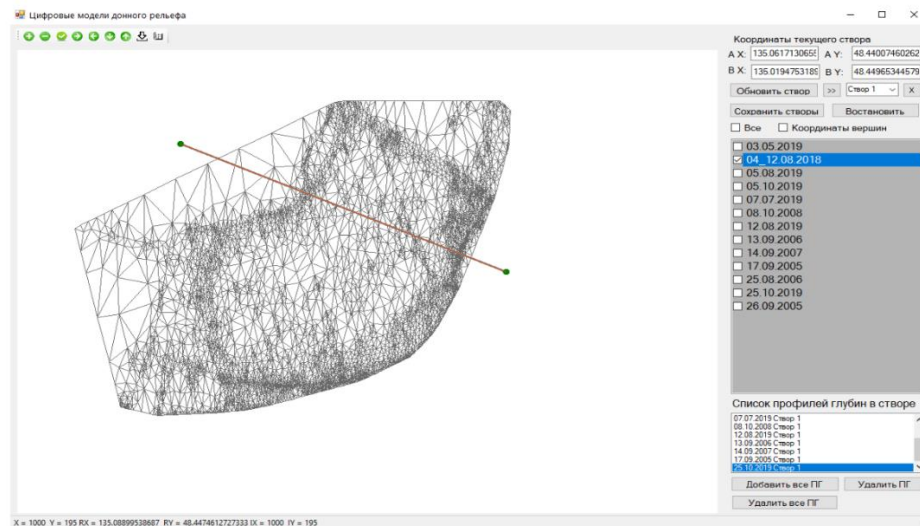


Рисунок 2.9 – Окно анализа донного рельефа

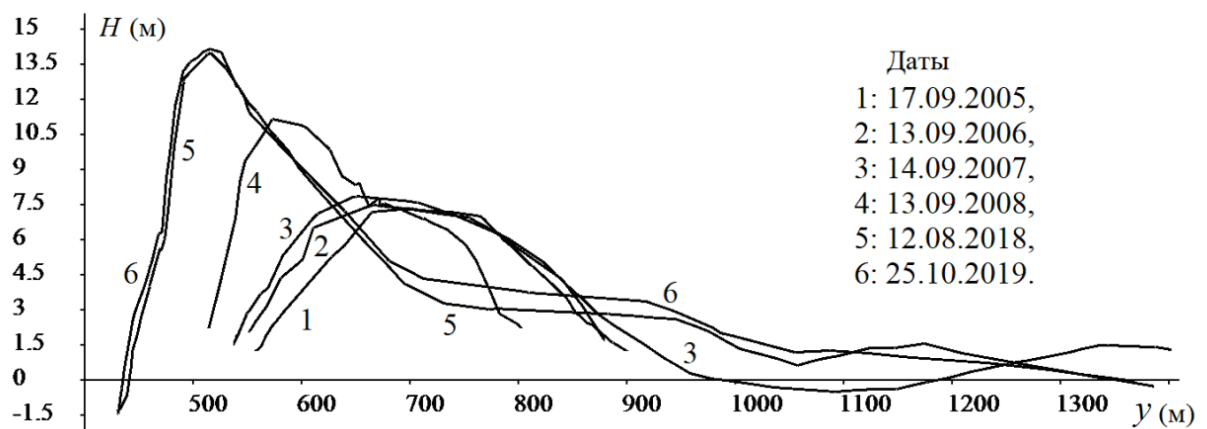


Рисунок 2.10 – Профили срезанных глубин H в створе №1, как функции от натуральной координаты створа y

Отступление берега за весь период наблюдения с 2005 г. по 2019 г. в створе № 1 составляет 144.1 м. Из графиков видно, что в период с 2005 г. по 2007 г. глубина потока меняется слабо, при этом имеются значительные береговые деформации, достигающие 23.8 м за 2007, 2008 гг. В таблице 2.3 представлены данные о скорости размыва правого берега в створе № 1:

Таблица 2.3 – данные о скорости размыва правого берега в створе № 1

Размыв, м/год	Годы наблюдений				
	2005-2006	2006-2007	2007-2008	2008-2018	2018-2019
Берег	13.5	10.3	23.8	4.8	4.4
Дно	0.2	0.4	3.2	0.27	0.2

Однако после 2008 г. скорость размыва уменьшается, и в период с 2008 г. по 2018 г. отступление берега составляет всего 48.1 м за 10 лет, т.е. 4.81 м в год, что согласуется с измерениями за 2018, 2019 гг., когда отступление берега было определено в 4.4 м в год.

Замедление берегового размыва привело к тому, что усилился размыв глубоководной части русла. Усиление активного размыва глубоководной части русла, возможно, связано [96, 97] с перераспределением расхода речного потока после строительства в 2005 г. переливных запруд в протоках Пемзенская и Бешеная, что привело к возрастанию расхода, реализующегося через 72 основное русло реки Амур до 2-9%. Косвенно на это указывает увеличение площади поперечного сечения реки. Отметим, что за период наблюдения глубоководная часть русла из формы, близкой к параболической, со средним уклоном берега в 3 градуса, претерпела сильный перекося в сторону правого берега, в результате средний уклон берега за 2018 – 2019 гг. достиг 8.5 градуса. При этом максимальная глубина русла увеличилась почти в два раза – от 7.3 м в 2005 г. до 14.0 м в 2019 г. На рис.

2.11 для створа № 2 приведены восстановленные профили срезанных глубин за периоды 2005 – 2006, 2008 и 2018 – 2019 гг. Измерения глубин для участка реки, через который проведен створ № 2, в 2007 г. не проводилось.

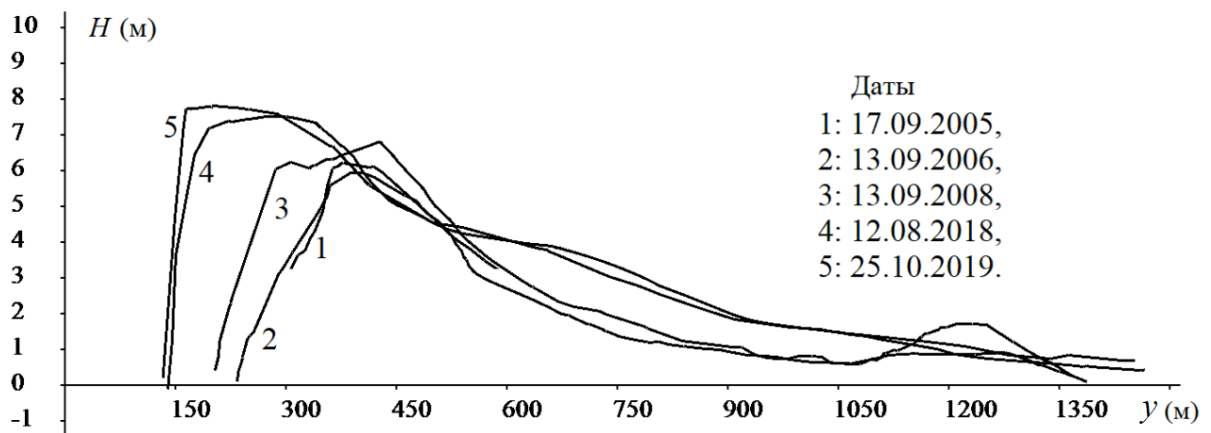


Рисунок 2.11 – Профили срезанных глубин H в створе №2, как функции от натуральной координаты створа y

Из анализа глубин на рис. 2.11 видно, что в створе № 2 происходит максимальное отступление берега острова Большой Уссурийский, составляющее 161.3 м за весь период наблюдения с 2005 г. по 2019 г., что объясняется, наряду с наибольшей кривизной русла на данном участке реки, отсутствием бронирования берега в отличие от створа № 1. На рис. 2.11 из графиков срезанных глубин видно, что отступление берега в створе № 2 согласуется с основными тенденциями, характерными для створа № 1. Характеристики скорости размыва правого берега в створе № 2 представлены в таблице 2.4:

Таблица 2.4 – скорости размыва правого берега в створе № 2

Размыв, м/год	Годы наблюдений			
	2005-2006	2006-2008	2008-2018	2018-2019
Берег	16	47.7	8.86	9.1
Дно	0.24	0.71	0.07	0.33

На рис. 2.12 приведены восстановленные профили срезанных глубин в 2005 – 2006, 2018 – 2019 гг. Измерения глубин для участка реки, через который проведен створ № 3, в 2007 и 2008 гг. не проводилось.

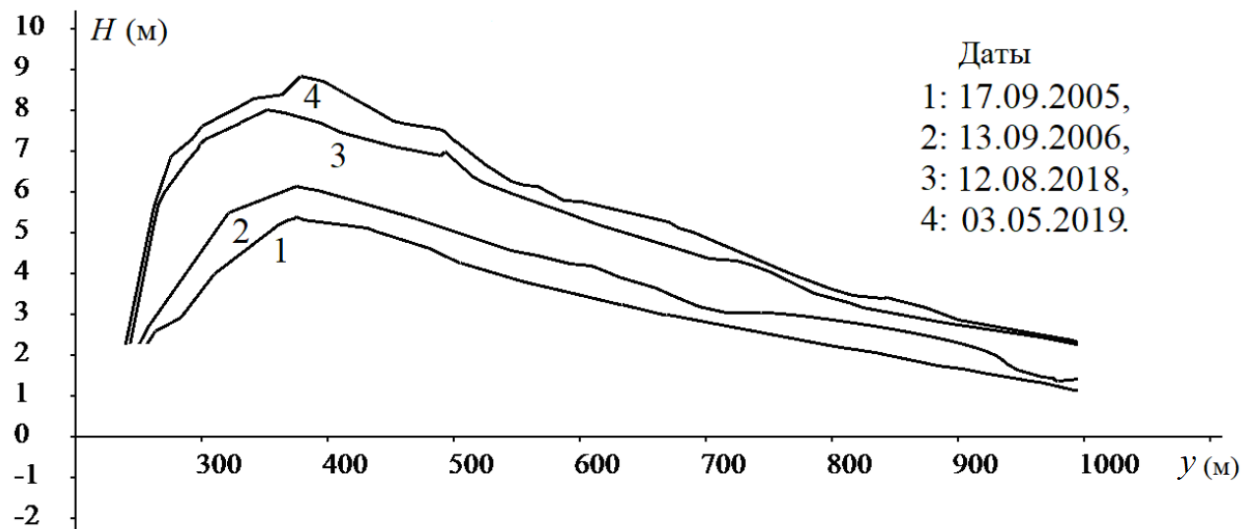


Рисунок 2.12 – Профили срезанных глубин H в створе № 3 как функции от натуральной координаты створа y

В створе № 3 происходит наименее активное отступление берега острова Большой Уссурийский, составляющее 47.3 м за весь период наблюдения с 2005 г. по 2019 г. Малая скорость отступления правого берега реки Амур и слабое изменение глубин русла обусловлены прохождением створа № 3 через область подхода основного гидродинамического потока к правому берегу реки. Однако необходимо отметить, что за период наблюдения практически в два раза увеличилась глубина русла, что согласуется с данными для других створов. Параметры скорости размыва даны в таблице 2.5:

Таблица 2.5 – параметры скорости размыва

Размыв, м/год	Годы наблюдений		
	2005-2006	2008-2018	2018-2019
Берег	19.5	1.58	3.8

Дно	0.85	0.18	0.75
-----	------	------	------

Анализ русловых и береговых деформаций выполнен посредством сопоставления срезанных профилей глубин (дна), полученных для заданных створов 1-3. Профили глубин построены с использованием цифровых моделей глубин, полученных по гидрографическим съемкам за 2005 – 2008 гг. и 2018 – 2019 гг.

Так, в створе №1 отступление берега в районе уреза воды составило менее 5 м в год. В створе №2 имеет место максимальная на рассматриваемом участке береговая эрозия, достигающая 10 м за год. Береговая эрозия правобережной части русла № 3 проявляется слабо.

2.3 Заключение по главе 2

В данной главе представлено описание информационной системы “Амур”, одним из разработчиков и администраторов которой является автор данной работы. Система разработана для хранения, обработки и анализа большого объема полученных в ходе проведения экспедиций натурных данных, представляющих собой десятки тысяч записей, характеризующих динамику речных русловых и береговых процессов. В период с 2018 года по текущее время автор периодически участвует в экспедициях по сбору натурных данных о глубинах на контрольных участках реки Амур Хабаровского водного узла.

Инструментарий информационной системы предоставляет возможности на основе имеющихся данных строить цифровые модели донного и берегового рельефов исследуемых участков реки, выполнять анализ русловых процессов на основании проведенных натурных наблюдений. Для построения цифровых моделей русла за конкретные временные периоды и, соответственно, расчетных областей для решения задач гидродинамики и береговых деформаций применялся метод

триангуляционного покрытия с определением уровней дна русла в вершинах триангуляционной сетки с последующим ее сгущением. С использованием отметок уровней на гидрпостах и кривых перехода для выбранного участка русла определялась величина расхода речного потока.

Глава 3. Модель установившегося течения реки в поперечном сечении изогнутого русла

В данной главе сформулированы математические постановки для решения задач расчета параметров гидродинамического потока с учетом существования вторичных поперечных течений, формирующихся на закруглении канала.

Трехмерное моделирование таких процессов на текущий момент возможно только для небольших модельных каналов, для реальных речных потоков необходимы модели пониженной размерности. Редукция задачи от трехмерной модели движения речного потока к двумерной модели потока в плоскости створа канала предполагает, что рассматриваемый гидродинамический поток является квазистационарным и для него выполнены гипотезы об асимптотическом поведении потока по потоковой координате створа. С учетом данных ограничений в смешанной постановке скорости – вихрь – функция тока сформулирована математическая модель задачи о движении стационарного турбулентного спокойного речного потока в створе канала.

В качестве дополнительных условий для редукции задачи требуется задание граничных условий на свободной поверхности потока для поля скорости, определяемого в нормальном и касательном направлении к оси створа. Предполагается, что значения данных скоростей должны быть определены из решения вспомогательных задач или получены из данных натурных или экспериментальных измерений.

Для решения сформулированной задачи используется метод конечных элементов в формулировке Петрова-Галеркина.

Получены дискретные аналоги и предложены алгоритмы решения задач. Проведена валидация математических моделей и алгоритмов расчета. Выполненные численные исследования показали в целом хорошую

согласованность полученных решений при их сравнении с известными экспериментальными данными. Показано, что в большинстве практических задач по расчету вторичных потоков влиянием старших производных от турбулентной вязкости в уравнениях для функции вихря можно пренебречь. Полученные погрешности связаны с необходимостью более точного определения циркуляционного поля скоростей в створе потока путем подбора и калибровки более подходящей модели вычисления турбулентной вязкости и граничных условий на свободной границе створа.

3.1. Задача о движении речного потока в створе кругового канала.

В данной главе предлагается модель движения установившегося речного потока в створе кругового канала. Полагая, что для речного потока выполняется условия для спокойного потока, рассмотренные в первой главе. Ее особенность заключается в гипотезе о слабом влиянии изменений окружных членов уравнений Рейнольдса на гидродинамическую картину в створе, т.е. все производные по координате x будут равны нулю [7, 8]. Косвенный учет их влияния, позволяющий позиционировать створ на повороте русла, выполняется через определение граничных условий для поля скорости, определяемой в нормальном и касательном направлении к оси створа на свободной поверхности потока. Предполагается, что значения данной скорости должны быть определены из решения вспомогательных задач или получены из данных натурных или экспериментальных измерений.

В отличие от модели движения речного потока в створе прямого канала (глава 4), когда модель турбулентной вязкости зависит только от осевой скорости потока, модель движения речного потока в створе кругового канала должна учитывать влияние полного вектора скоростей на генерацию турбулентной вязкости.

Пример геометрии расчетной области Ω для определения параметров гидродинамического потока и ее границы $\Gamma = \bigcup_k \Gamma_k$ схематично представлены

на рис. 1.1. Русло канала имело постоянный малый продольный уклон J в окружном направлении движения гидродинамического потока, движущегося в поле силы тяжести, Γ_1 – донно-береговая граница канала. Γ_2 – свободная поверхность потока.

3.2. Математическая постановка задачи

Математическая постановка задачи о движении гидродинамического потока в створе искривленного канала сложного сечения. Канал имеет постоянный малый продольный уклон J по окружной координате в направлении движения гидродинамического потока. Предполагается, что для канала выполняются условия малости в отношении глубины потока к его ширине $H/B \ll 1$ и глубины потока к среднему радиусу его закругления $H/R \ll 1$. Геометрия расчетной области Ω и ее границы Γ_1, Γ_2 представлены на рис. 3.1. Граница Γ_1 представляет собой смоченную береговую и донную поверхности канала, граница Γ_2 определяет свободную поверхность потока.

Для определения окружной скорости потока используем уравнение Рейнольдса, записанное в цилиндрической системе координат:

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \sigma \frac{VU}{y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \sigma \left(\mu_e \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U}{y} \right) - \frac{\partial \mu_e}{\partial y} \frac{U}{y} \right) + \rho g J, \quad (3.1)$$

Для расчета вторичных скоростей в створе канала будем использовать выражения

$$V = \frac{1}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad W = -\frac{1}{y^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (3.2)$$

Для определения функции вихря ω и функции тока Φ в створе канала используем уравнения Рейнольдса в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\sigma}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + y^\sigma \omega = 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(\rho V - \frac{\partial \mu_e}{\partial y} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \left(\rho W - \frac{\partial \mu_e}{\partial z} \right) \frac{\partial \omega}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \sigma \frac{\omega}{y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + Q_\omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$Q_\omega = -\frac{\rho \sigma}{y} \frac{\partial}{\partial z} (U^2) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z \partial y} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yy}) + 2 \varepsilon_{yz} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \right). \quad (3.5)$$

Уравнения (3.1) - (3.5) описывают движение речного потока в цилиндрической системе координат при $\sigma = 1$ и в декартовой – при $\sigma = 0$.

Определим граничные условия для уравнений задачи (3.1), (3.3), (3.4), определяющих движение гидродинамического потока, проходящего через створ канала. Поскольку через контур области Ω нет потока жидкости, то значение функции тока Φ на контуре постоянно и может быть принято равным нулю, тогда граничные условия на дне канала примут вид [99]

$$U = 0, \quad \Phi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 n}, \quad (y, z) \in \Gamma_1. \quad (3.6)$$

Граничные условия на свободной поверхности потока

$$U = U_\eta, \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = V_\eta, \quad \omega = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 z} \right), \quad (y, z) \in \Gamma_2. \quad (3.7)$$

Задача (3.1) - (3.7) замыкается алгебраической моделью турбулентной вязкости Лео К. ван Рейна [86]

$$\mu = \mu_t + \mu_0, \quad \mu_t = \kappa u_* H(y) \begin{cases} \left(1 - \frac{z}{H(y)} \right) \left(\frac{z}{H(y)} \right), & \frac{z}{H(y)} < 0.5 \\ 0.25, & \frac{z}{H(y)} \geq 0.5 \end{cases},$$

$$\text{где } u_* = \sqrt{g J R}, \quad R = S_\Omega / P, \quad S_\Omega = \int_{-z_0}^{z_1} H(y) dy, \quad P = \int_{-z_0}^{z_1} \sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta(y)}{dy} \right)^2} dy. \quad (3.8)$$

Здесь $U = U(y, z)$, $V = V(y, z)$, $W = W(y, z)$ – осредненная по Рейнольдсу скорость речного потока в области Ω , J – уклон речного русла, $\mu = \mu_t + \mu_0$, где μ_t – турбулентная вязкость потока, μ_0 – молекулярная вязкость потока, $H = \eta - \zeta$ – глубина потока, g – ускорение свободного падения, η и $\zeta = \zeta(y)$ – отметки свободной поверхности потока и донной поверхности русла соответственно, ρ_w – плотность воды.

3.3. Слабая формулировка задачи.

Рассмотрим слабую вариационную формулировку Галеркина [46] для задачи (3.1) - (3.8) с набором пробных функций $\{\psi\} \in H^1(\Omega)$. В задаче необходимо найти неизвестные функции $\{U, V, W, \omega, \Phi\} \in H^1(\Omega)$, такие, что:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\rho L_\alpha \left(V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{VU}{y} \right) + \mu \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} L_\alpha \left[\frac{\partial \mu_e}{\partial y} \frac{U}{y} - \mu_e \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U}{y} \right) \right] d\Omega = \int_{\Omega} L_\alpha \rho_w g J d\Omega \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \left[L_\alpha \left(\left(\rho V - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \left(\rho W - \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\omega}{y} \right) + \frac{\partial L_\alpha}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \right] d\Omega = \\ & + \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\rho U^2}{y} \right] d\Omega + \int_{\Omega_e} \left[L_\alpha \left(2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yy}) - \varepsilon_{yz} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \right) \right) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{N_\alpha}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - y N_\alpha \omega \right] d\Omega = 0. \quad (3.11)$$

$$\int_{\Omega} \left[N_\alpha \left(V - \frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right] d\Omega = 0, \quad (3.12)$$

$$\int_{\Omega} \left[N_\alpha \left(W + \frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] d\Omega = 0, \quad (3.13)$$

Граничные условия

$$U = 0, \quad (y, z) \in \Gamma_1, \quad U = U_\eta \quad (y, z) \in \Gamma_2. \quad (3.14)$$

$$\Phi = 0, \quad \omega = \omega_b, \quad (y, z) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \quad (3.15)$$

где граничное значение ω_b определяется на этапе формулировки дискретного аналога,

3.4. Дискретный аналог задачи.

Используем метод конечных элементов в формулировке Петрова – Галеркина [46]. Разобьем расчетную область Ω на трехузловые конечные элементы Ω_e , $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$. Введем на конечном элементе функции формы [100]

N_α :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{2\Omega_e} [(y_2 z_3 - y_3 z_2) + (z_2 - z_3)y + (y_3 - y_2)z], \\ N_2 = \frac{1}{2\Omega_e} [(y_3 z_1 - y_1 z_3) + (z_3 - z_1)y + (y_1 - y_3)z], \\ N_3 = \frac{1}{2\Omega_e} [(y_1 z_2 - y_2 z_1) + (z_1 - z_2)y + (y_2 - y_1)z], \end{cases} \quad (3.16)$$

где y_k, z_k – координаты вершин (узлов) конечного элемента, Ω_e – площадь конечного элемента, определяемая по формуле

$$\Omega_e = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Определим аппроксимацию искомых функций на конечном элементе

$$U = N_\alpha U_\alpha, \quad V = N_\alpha V_\alpha, \quad W = N_\alpha W_\alpha, \quad \mu_e = N_\alpha \mu_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.18)$$

$$\omega = N_\alpha \omega_\alpha, \quad \Phi = N_\alpha \Phi_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.19)$$

где $U_\alpha, V_\alpha, W_\alpha, \omega_\alpha, \Phi_\alpha$ – значения искомых полей в узлах конечного элемента, μ_α – значение функции приведенной вязкости в узлах конечного

элемента. $\bar{\mu}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2}$ – осредненные величины функции вязкости

и ее производных второго порядка на конечном элементе.

Для противопоточной стабилизации дискретного аналога задачи воспользуемся методом Петрова-Галеркина (SUPG) [101], с весовыми функциями

$$L_\alpha = N_\alpha + a h_y A_y \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} + a h_z A_z \frac{\partial N_\alpha}{\partial z}, \quad (3.20)$$

где $A_y = \frac{\bar{V}}{\sqrt{\bar{V}^2 + \bar{W}^2}}, A_z = \frac{\bar{W}}{\sqrt{\bar{V}^2 + \bar{W}^2}}, h = h_y = h_z = \frac{\sqrt{\Omega_e}}{2}, 0.5 \leq a \leq 1.$

Переход от узловых значений искомых функций к значениям на элементах будем выполнять по формулам

$$\bar{U} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 U_\alpha, \quad \bar{V} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 V_\alpha, \quad \bar{W} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 W_\alpha, \quad \bar{y} = R_0 + \frac{1}{3} \sum_{\gamma=1}^3 y_\gamma, \quad (3.21)$$

$$\bar{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} V_\alpha, \quad \bar{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} W_\alpha, \quad \bar{\varepsilon}_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial y} W_\alpha + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} V_\alpha \right). \quad (3.22)$$

Используя интерполяцию (3.16) – (3.22), преобразуем интегральные тождества (3.9) – (3.15) в дискретные аналоги задачи

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \rho L_\alpha \left(N_\gamma V_\gamma \left(\frac{\partial N_\beta}{\partial y} + \frac{N_\beta}{\bar{y}} \right) + N_\gamma W_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega U_\beta + \\ & \int_{\Omega_e} L_\alpha \left[\mu_\gamma \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} \frac{N_\beta}{\bar{y}} - \bar{\mu} \left(\frac{1}{\bar{y}} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} - \frac{N_\beta}{\bar{y}^2} \right) \right] d\Omega U_\beta + \\ & + \int \bar{\mu} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega U_\beta = \int_{\Omega_e} L_\alpha \rho_w g J d\Omega \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \rho L_\alpha \left(N_\gamma V_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + N_\gamma W_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega \omega_\beta - \int_{\Omega_e} L_\alpha \left(\mu_\gamma \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + \mu_\gamma \frac{\partial N_\gamma}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega \omega_\beta + \\ & \int_{\Omega_e} \bar{\mu} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega \omega_\beta + \int_{\Omega_e} \bar{\mu} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{N_\beta}{\bar{y}} d\Omega \omega_\beta = \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\rho N_\gamma (U^2)_\gamma}{\bar{y}} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} + \frac{N_\alpha}{\bar{y}} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right] d\Omega \Phi_\beta = \int_{\Omega_e} \bar{y} N_\alpha N_\gamma d\Omega \omega_\gamma, \quad (3.25)$$

$$\int_{\Omega} N_\alpha N_\beta d\Omega V_\beta = \int_{\Omega} \frac{N_\alpha}{\bar{y}} \frac{\partial N_\gamma}{\partial z} \Phi_\gamma d\Omega, \quad (3.26)$$

$$\int_{\Omega} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega W_{\beta} = - \int_{\Omega} \frac{N_{\alpha}}{\bar{y}} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial y} \Phi_{\gamma} d\Omega, \quad (3.27)$$

3.5. Алгоритм решения задачи.

Для узлов донной поверхности (за исключением береговых узлов) с координатами $\vec{x}_i = (y_i, z_i) \in \Gamma_1$ выполним поиск векторов

$$\vec{\tau}_i = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_{i-1}, \quad \vec{n}_i = \left(-\frac{\tau_{i2}}{\sqrt{\tau_{i1}^2 + \tau_{i2}^2}}, \frac{\tau_{i1}}{\sqrt{\tau_{i1}^2 + \tau_{i2}^2}} \right), \quad \vec{p}_i = \vec{x}_i + h\vec{n}_i,$$

и приграничных конечных элементов с функциями формы $N_{\alpha}(\vec{p}_i)$. Аналогичный поиск конечных элементов с функциями формы $N_{\alpha}(\vec{p}_i)$ выполняется для узлов свободной поверхности $\vec{x}_i \in \Gamma_2$

$$\vec{n}_i = (0, -1), \quad \vec{p}_i = \vec{x}_i + h\vec{n}_i,$$

Вычисление начальной динамической скорости

$$u_* = \sqrt{g J R}, \quad R = S_{\Omega} / P, \quad S_{\Omega} = \int_{-z_0}^{z_1} H(y) dy, \quad P = \int_{-z_0}^{z_1} \sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta(y)}{dy} \right)^2} dy$$

1. Расчет поля вязкости для всех узлов расчетной области $\vec{x}_i = (y_i, z_i) \in \Omega$

$$\mu_i = \mu_{ti} + \mu_0, \quad \mu_{ti} = \kappa u_* H(y_i) \left\{ \left(1 - \frac{z_i}{H(y_i)} \right) \left(\frac{z_i}{H(y_i)} \right) \right\}_{0.25}, \quad \frac{z_i}{H(y_i)} < 0.5,$$

2. Вычисление поля скорости U_{α}

$$\bigcup \left[(K_{\alpha\beta}^{CU} + K_{\alpha\beta}^{DU} + K_{\alpha\beta}^{DRU}) U_{\beta} + F_{\alpha}^U \right] = 0,$$

3. Расчет граничных условий для поля вихря

$$\omega_{\zeta i} = - \frac{N_{\alpha}(\vec{p}_i) \Phi_{\alpha}}{h^2}, \quad \vec{x}_i \in \Gamma_1,$$

$$\omega_{\eta i} = - \frac{N_{\alpha}(\vec{p}_i) \Phi_{\alpha}}{h^2} + \frac{2hV_{\eta}}{h^2}, \quad \vec{x}_i \in \Gamma_2,$$

4. Вычисление поля вихря ω_a

$$\bigcup \left[(K_{\alpha\beta}^{C\omega} + K_{\alpha\beta}^{D\omega} + K_{\alpha\beta}^{CRW}) \omega_{\beta}^* + F_{\alpha}^{U\omega} \right] = 0,$$

5. Релаксация функции вихря ω_a

$$\omega_\beta = (1 - \gamma)\omega_\beta^* + \gamma\omega_\beta^0$$

6. Вычисление поля функции тока Φ_α

$$\bigcup [K_{\alpha\beta}^\Phi \Phi_\beta^* + F_\alpha^\Phi] = 0,$$

7. Релаксация функции тока Φ_β

$$\Phi_\beta = (1 - \gamma)\Phi_\beta^* + \gamma\Phi_\beta^0$$

8. Вычисление полей скорости в плоскости створа

$$\bigcup [M_{\alpha\beta} V_\beta + F_\alpha^V] = 0, \quad \bigcup [M_{\alpha\beta} W_\beta + F_\alpha^W] = 0,$$

9. Вычисление невязки $E_r = \sum_i^M (\omega_i - \omega_i^0)^2 / \sum_i^M \omega_i^2 + \sum_i^M (\Phi_i - \Phi_i^0)^2 / \sum_i^M \Phi_i^2$, при

$E_r > \varepsilon$ переходим на пункт 1. При $E_r \leq \varepsilon$ завершаем расчет.

Здесь ε - допустимая невязка решения, γ - параметр релаксации решения,

M - количество узлов в расчетной области,

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}^{CU} = & \int_{\Omega_e} \rho N_\alpha N_\gamma V_\gamma d\Omega \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + \int_{\Omega_e} \rho N_\alpha N_\gamma W_\gamma d\Omega \frac{\partial N_\beta}{\partial z} + \int_{\Omega_e} \rho N_\alpha N_\beta \frac{\bar{V}}{\bar{y}} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} \rho \left(a h_y A_y \frac{\partial N_a}{\partial y} + a h_z A_z \frac{\partial N_a}{\partial z} \right) \left(\bar{V} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega + \\ & + \int_{\Omega_e} \rho \left(a h_y A_y \frac{\partial N_a}{\partial y} + a h_z A_z \frac{\partial N_a}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{\bar{y}} N_\beta N_\gamma V_\gamma \right) d\Omega \end{aligned}$$

$$K_{\alpha\beta}^{DU} = \int_{\Omega_e} \bar{\mu}_e \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega$$

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}^{DRU} = & \int_{\Omega_e} \left(N_\alpha N_\beta \left(\frac{\partial N_\gamma}{\partial y} \frac{\mu_{e\gamma}}{\bar{y}} + \frac{\bar{\mu}_e}{\bar{y}^2} \right) - N_\alpha \frac{\bar{\mu}_e}{\bar{y}} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) d\Omega + \\ & \int_{\Omega_e} \left(a h_y A_y \frac{\partial N_a}{\partial y} + a h_z A_z \frac{\partial N_a}{\partial z} \right) \left[\left(\frac{\partial N_\gamma}{\partial y} \frac{\mu_{e\gamma}}{\bar{y}} + \frac{\bar{\mu}_e}{\bar{y}^2} \right) N_\beta - \frac{\bar{\mu}_e}{\bar{y}} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right] d\Omega \end{aligned}$$

$$F_\alpha^U = \int_{\Omega_e} \left(N_\alpha + a h_y A_y \frac{\partial N_a}{\partial y} + a h_z A_z \frac{\partial N_a}{\partial z} \right) \rho_w g J d\Omega$$

$$\begin{aligned}
K_{\alpha\beta}^{C\omega} = & \int_{\Omega_e} \left(\rho N_\alpha N_\gamma V_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + \rho N_\gamma W_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega + \\
& - \int_{\Omega_e} N_\alpha \left(\mu_\gamma \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + \mu_\gamma \frac{\partial N_\gamma}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega + \\
& \int_{\Omega_e} \rho \left(a h_y A_y \frac{\partial N_a}{\partial y} + a h_z A_z \frac{\partial N_a}{\partial z} \right) \left(N_\gamma V_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + N_\gamma W_\gamma \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega - \\
& - \int_{\Omega_e} \left(a h_y A_y \frac{\partial N_a}{\partial y} + a h_z A_z \frac{\partial N_a}{\partial z} \right) \left(\mu_\gamma \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + \mu_\gamma \frac{\partial N_\gamma}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega \\
K_{\alpha\beta}^{D\omega} = & \int_{\Omega_e} \bar{\mu} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega_e} \bar{\mu} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{N_\beta}{\bar{y}} d\Omega \\
F_\alpha^{U\omega} = & \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\rho N_\gamma (U^2)_\gamma}{\bar{y}} \right) d\Omega \\
K_{\alpha\beta}^\Phi = & \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} + \frac{N_\alpha}{\bar{y}} \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \right] d\Omega , \\
F_\alpha^\Phi = & \int_{\Omega_e} \bar{y} N_\alpha N_\gamma d\Omega \omega_\gamma , \quad M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} N_\alpha N_\beta d\Omega , \\
F_\alpha^V = & \int_{\Omega} \frac{N_\alpha}{\bar{y}} \frac{\partial N_\gamma}{\partial z} \Phi_\gamma d\Omega , \quad F_\alpha^W = - \int_{\Omega} \frac{N_\alpha}{\bar{y}} \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} \Phi_\gamma d\Omega .
\end{aligned}$$

3.6. Решение задачи в прямоугольном створе

Для валидации предложенной математической модели (3.1) - (3.8) был решен ряд задач. В каждой из задач выполнялся ряд расчетов, связанных с определением полей U , V , W , Φ , ω в тестовых створах канала.

Для первой задачи были получены решения для прямоугольных створов изогнутого канала. Результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными, полученными в работе [102].

Во второй задаче были получены решения для изогнутого канала, створы которого имеют сложную геометрическую форму, определенную в работе [7]. Полученные результаты сравнивались с асимптотическим решением Гришанина [9] и экспериментальными данными Розовского [7].

Рассмотрим решение первой задачи в прямоугольном створе. Геометрия канала и профиль створа, приведенные на рис. 3.1 и 3.2, согласуются с работой [102].

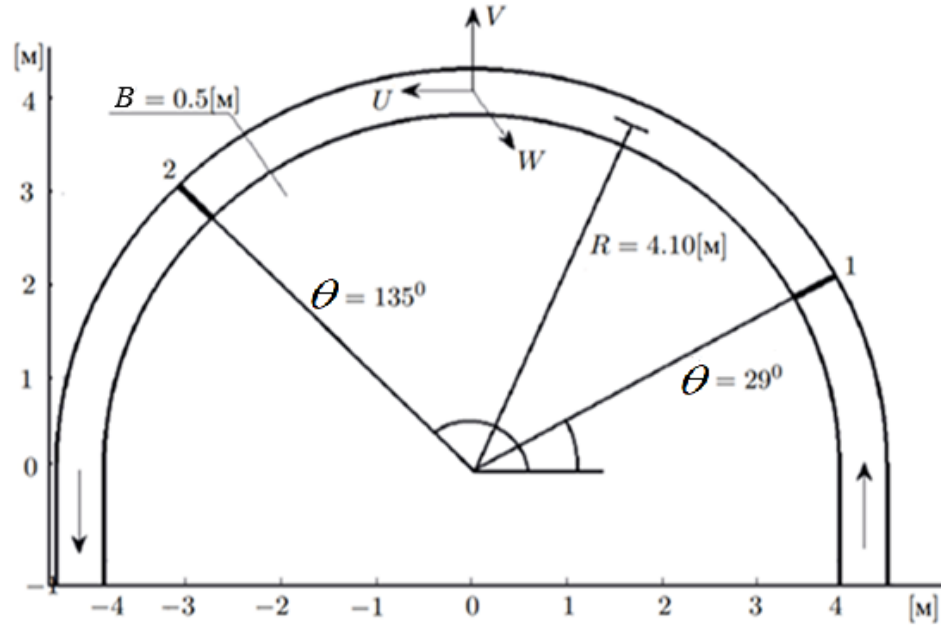


Рисунок 3.1 – Геометрия канала и створы, в которых проводились расчеты

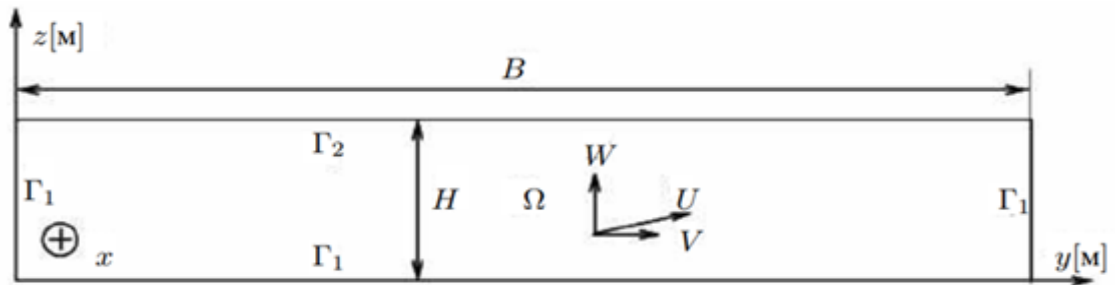


Рисунок 3.2 – Геометрия расчетной области Ω и ее границы $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

Расчеты искомых полей в створах канала выполнялись для потока с расходом $Q_w = 0.052$ л/с, средней скоростью $U = 0.2$ м/с, площадью живого сечения $S = 0.026$ м², глубиной канала $H = 0.052$ м и средним радиусом закругления канала $R = 4.1$ м, которые согласуются с экспериментальными значениями [102].

Вычисления проводились на нерегулярной конечно-элементной сетке. Сеточная сходимость задачи проверялась последовательным сгущением

расчетной сетки. Была выбрана репрезентативная расчетная сетка, содержащая 53972 конечных элемента.

Согласно исследованиям [102, 103] выявлено, что для каналов существует область пространственного развития потока (от 0° до примерно 70°) и область, где поток можно рассматривать как осесимметричный (за пределами примерно 90°). Поскольку для валидации данной модели интересен переходный режим, было решено выполнить моделирование течения в створах 29° , 60° и 145° .

При вычислении искомых полей в данных створах на свободной поверхности потока задавались граничные условия (3.14) и (3.15) для функций U и V . Значения функций U_η и V_η аппроксимированы по экспериментальным данным [102], приведенным в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Окружные и радиальные скорости потока на свободной поверхности в створах

у [м]	29°	U [см/с]	V [см/с]	60°	U [см/с]	V [см/с]	145°	U [см/с]	V [см/с]
0		0	0		0	0		0	0
0.023		18.63	0.45		16.13	0.51		1.57	0.47
0.035		19.1	1.1		18.47	1.09		18.48	1.16
0.06		21.76	1.49		20.72	1.49		20.8	1.47
0.1		25.2	1.99		23.57	1.77		23.32	1.75
0.171		29	2.01		26.42	2.01		25.73	1.64
0.25		29.22	2.59		28.47	2.06		27.9	2.1
0.33		28.48	2.61		30.14	2.12		28.85	2.34
0.4		28.15	1.92		32.66	0.95		29.77	1.08
0.44		25.47	-0.09		32.39	-0.17		27.32	-0.05
0.465		22.04	-1.87		28.23	-1.67		23.63	-1.11
0.485		20.09	-1.35		25.22	-2.04		20.79	-1.38
0.5		0	0		0	0		0	0

На рис. 3.3. – 3.10. для створов 29° , 60° и 145° выполнено сравнение экспериментальных полей окружной и радиальной скоростей потока, восстановленных из табличных данных [102]. Следует отметить, что в работе [102] данные о потоке вблизи боковых стенок канала отсутствуют, на рисунках области отсутствия данных ограничены пунктирной линией. Из

рис. 3.3. – 3.10. видно, что численные данные хорошо согласуются с экспериментальными данными. Можно увидеть, что скорости вторичного потока в центральной части поперечного сечения обычно составляют около 10% от объемной скорости. Во всех трех поперечных сечениях значения радиальных скоростей вблизи внешней границы отрицательны, это указывает на то, что встречно-вращающаяся вторичная проточная ячейка вблизи внешней границы канала имеет радиальную скорость того же порядка величины, что и при первичном спиральном движении, полученном в работе ван Балена [103].

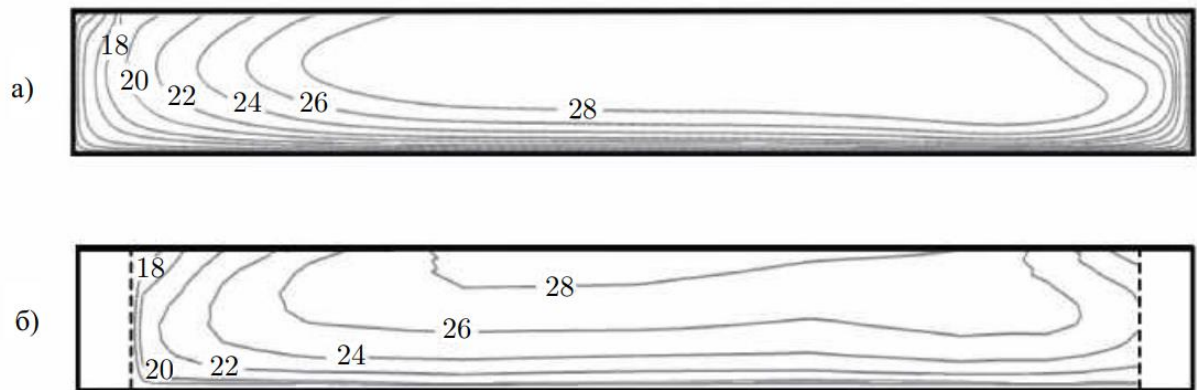


Рисунок 3.3 – Сравнение расчетных U (а) и экспериментальных U_{exp} (б) полей скорости в створе 29° в [см/с]

Сравнение расчетных и экспериментальных данных показывает хорошее качественное и количественное согласование полученных расчетных полей. Наибольшее различие наблюдается в пристеночной области и может быть связано со следующими причинами:

а) отсутствие в пристеночной области экспериментальных измерений приводит к необходимости их экстраполяции, которая может искажать истинные значения граничных условий U_η , V_η в пристеночной области;

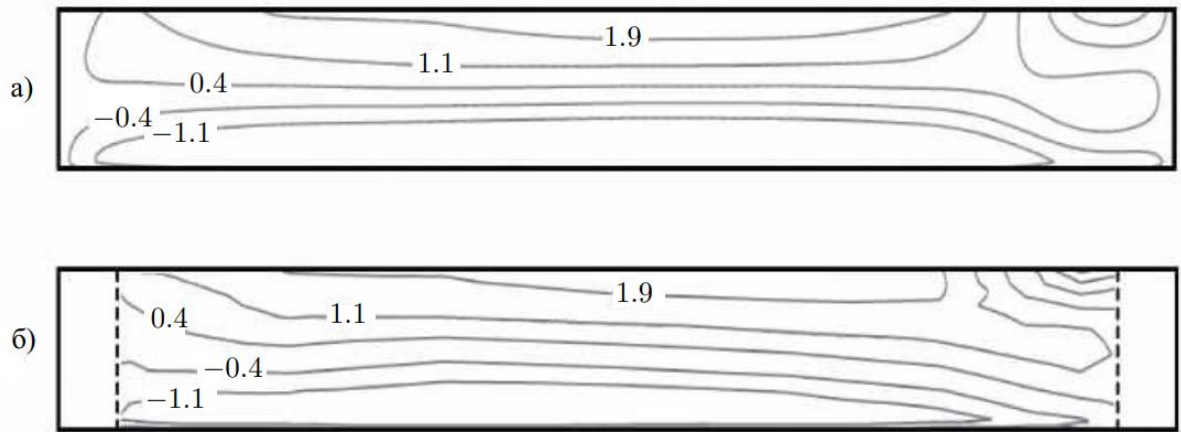


Рисунок 3.4 – Сравнение расчетных V (а) и экспериментальных V_{exp} (б) полей скорости в створе 29° в [см/с]

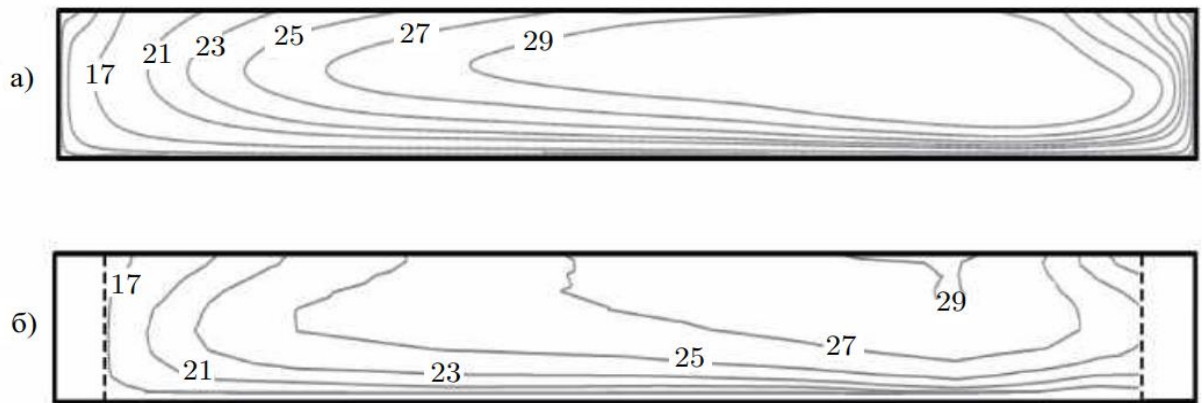


Рисунок 3.5 – Сравнение расчетных U (а) и экспериментальных U_{exp} (б) полей скорости в створе 60° в [см/с]

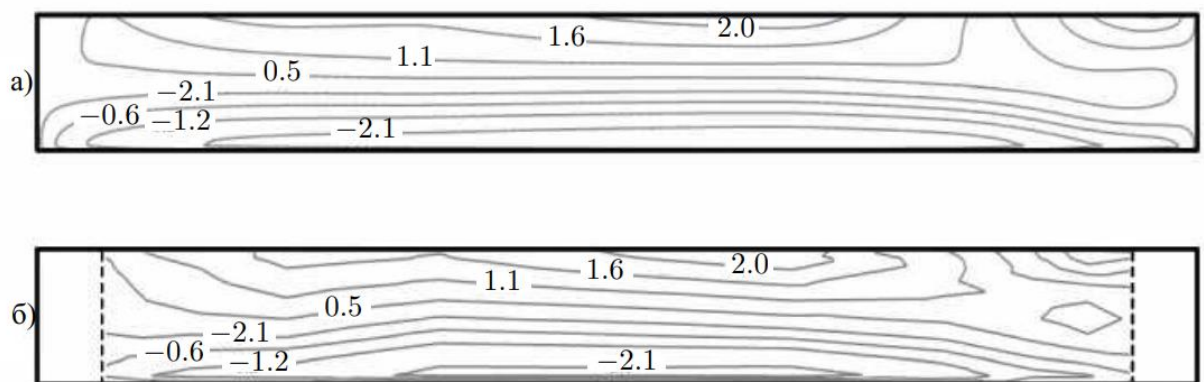


Рисунок 3.6 – Сравнение расчетных V (а) и экспериментальных V_{exp} (б) полей скорости в створе 60° в [см/с]

б) несоответствие радиальных скоростей вблизи внешнего берега может быть объяснено замечаниями ван Балена [103] и Буя [104]: «Конфигурация пучка LDV, используемая для измерения через дно, приводит к наибольшей погрешности при и без того небольшом измеренном значении вертикальной составляющей скорости V . Следовательно, надежность полученного значения V относительно низкая» (прим. перевод), что также может искажать используемые граничные условия U_η , V_η в пристеночной области задачи;

в) искажения, вносимые в расчет выбранной моделью турбулентной вязкости;

г) искажения, вносимые в расчет отбрасыванием правой части в Q_w при разрешении уравнения для функции вихря.

Стоит отметить, что предложенная модель адекватно отражает процесс течения потока в сечении изогнутого русла и перечисленные выше замечания указывают только на возможность повышения точности расчетных данных.

Анализ полученных решений в различных створах наглядно показывает, что граничные условия на поверхности потока позволяют контролировать характер изменения потока во всем створе, максимальные ошибки $\max |U - U_{\text{exp}}| / \max |U|$, $\max |V - V_{\text{exp}}| / \max |V|$ по полям скорости не превышают 20% для окружных и радиальных скоростей во всех трех сечениях. При этом максимальные значения поля радиальной скорости в расчете несколько выше, чем в эксперименте.

На рис. 3.9 – 3.10 приведены поля функции тока Φ и вихря ω , полученные в створе 29⁰. Их анализ показывает, что в плоскости створа возникает два вторичных вихревых потока. Данный результат согласуется с экспериментальными данными Блокленда [102] и расчетными данными ван Балена [103], полученными при расчете потока LES методом. Отметим, что в своей работе [103] ван Бален использовал модель турбулентного потока с

RANS замыканием $k - \varepsilon$ и не смог с ее помощью воспроизвести вторичный вихрь у выпуклого берега. В то время как используемая автором простая алгебраическая модель турбулентности в сформулированной модели потока в створе канала позволила воспроизвести качественные и количественные параметры потока, например, поля функции тока Φ и функции вихря ω ,

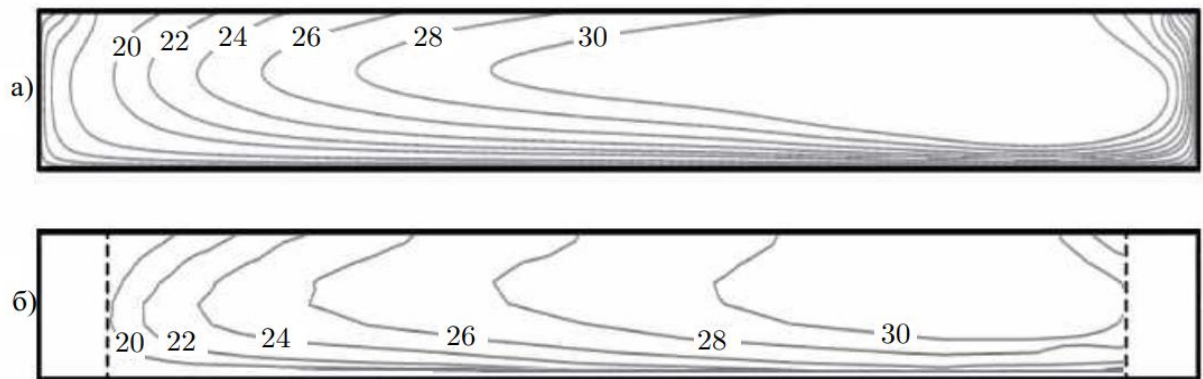


Рисунок 3.7 – Сравнение расчетных U (а) и экспериментальных U_{exp} (б) полей скорости в створе 145° в [см/с]

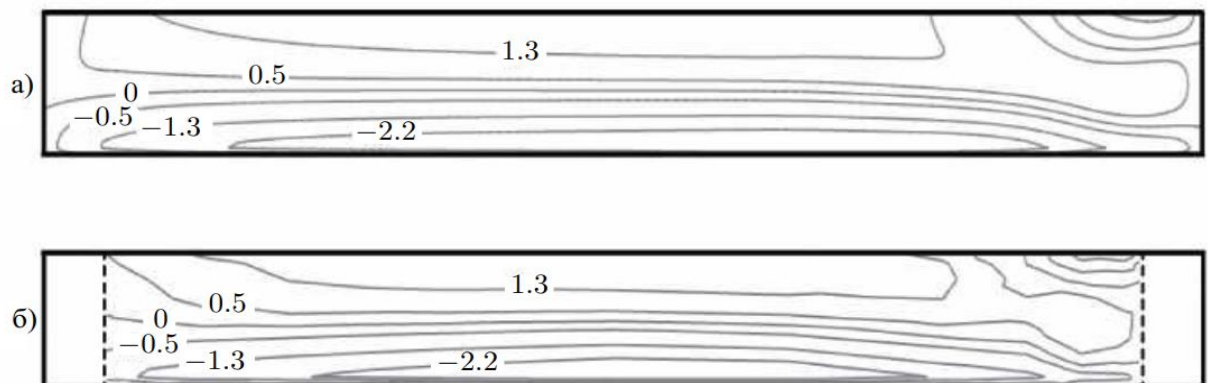


Рисунок 3.8 – Сравнение расчетных V (а) и экспериментальных V_{exp} (б) полей скорости в створе 145° в [см/с]



Рисунок 3.9 – Поле расчетной функции тока $\Phi = 104$ [м/с] в створе 29°

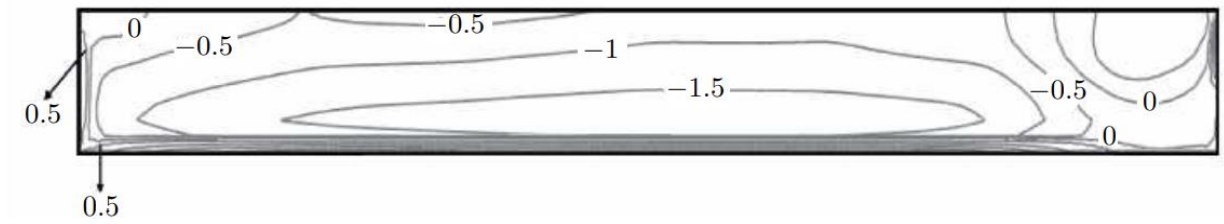


Рисунок 3.10 – Поле расчетной функции тока ω в створе 29° в [1/с]

приведенные на рис. 3.9 и 3.10, хорошо согласуются с результатами ван Балена [103]. Данный факт увеличивает ценность предложенного подхода и полученных численных результатов.

3.7. Решение задачи в канале Розовского.

Рассмотрим решение второй задачи для изогнутого канала (рис. 3.11), створы которого имеют сложную геометрическую форму (рис. 3.12). Решение выполнялось в створах 15, 18, 21 канала, определенного в работе [7]. Геометрия створа приведена в таблице 3.2 [7].

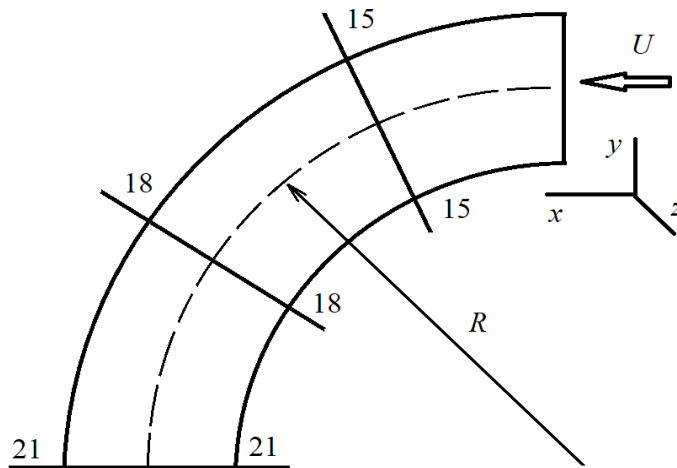


Рисунок 3.11 – Расположение расчетных створов (15, 18 и 21) на фрагменте схемы экспериментального канала Розовского

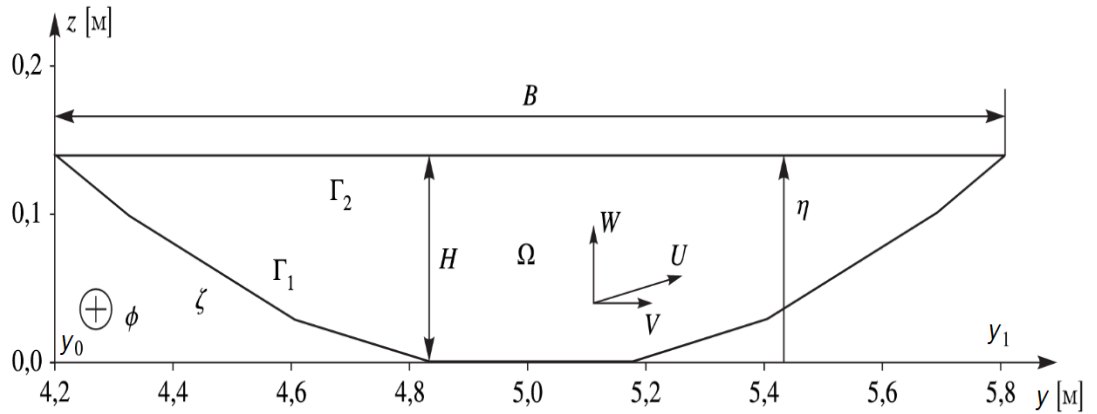


Рисунок 3.12 – Расчетная область задачи

Таблица 3.2 – Геометрия канала

y [м]	0.0	0.119	0.406	0.635	0.805	1.974	1.203	1.490	1.610
z [м]	0.140	0.1	0.029	0.0	0.0	0.0	0.029,	0.10	0.140

Расчеты искомых полей в створах канала выполнялись для потока с расходом $Q_w = 0.54 \text{ л/с}$, средней скоростью потока $U = 0.355 \text{ м/с}$, площадью створа $S = 0.152 \text{ м}^2$, глубиной канала $H = 0.14 \text{ м}$ и средним радиусом закругления канала $R = 5 \text{ м}$, которые согласуются с экспериментальными значениями [7].

Вычисления проводились на нерегулярной конечно-элементной сетке. Сеточная сходимость задачи, проверялась последовательным сгущением расчетной сетки. Была выбрана репрезентативная расчетная сетка, содержащая 53972 конечных элемента, со средним диаметром конечного элемента $h_y = h_z = \frac{\sqrt{\Omega_e}}{2} \approx 2.5 \text{ мм}$.

При вычислении искомых полей на свободной поверхности потока задавались граничные условия (3.13), (3.14) для функций U и V . Вид данных

функций U_η и V_η (кривые 1-3), аппроксимированных по экспериментальным данным [7], приведен на рис. 3.13, 3.14.

Пример полученных расчетных полей для створа 18 приведен на рис. 3.15. Изолинии скоростей U , V , W и функции Φ тока показывают, что в плоскости створа возникает только один вихревой поток.

Приведенные на рис. 3.16 результаты сравнения придонной радиальной скорости потока, полученной на расстоянии $0.05H$ от дна, с экспериментальными данными Розовского в створах 15, 18 и 21 позволяют сделать вывод о принципиальной применимости предложенной модели при исследовании русловых процессов.

К сожалению, количество экспериментальных точек, в которых проводились замеры окружной и радиальной скоростей в створах 15, 18 и 21 соответственно, оказалась явно недостаточно для точной количественной аппроксимации скоростей на свободной поверхности потока, используемой в граничных условиях задачи, и их грубая интерполяция искажает получаемые численные результаты, не позволяя определить границы применимости предложенной математической модели.

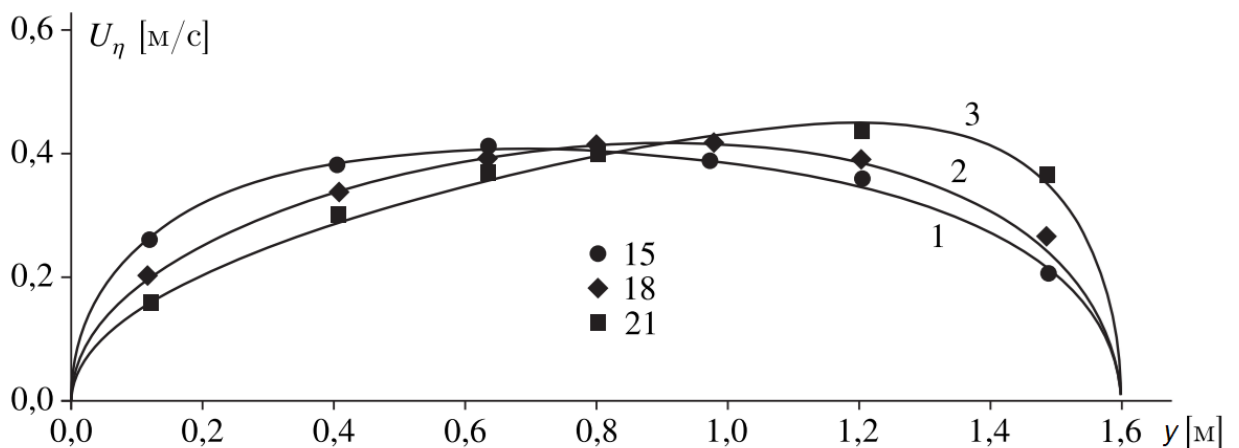


Рисунок 3.13 – Точечные экспериментальные данные полей скорости на поверхности потока в створах канала 15, 18 и 21 [7] и их аппроксимация 1, 2,

3, использовавшаяся в качестве граничных условий U_η

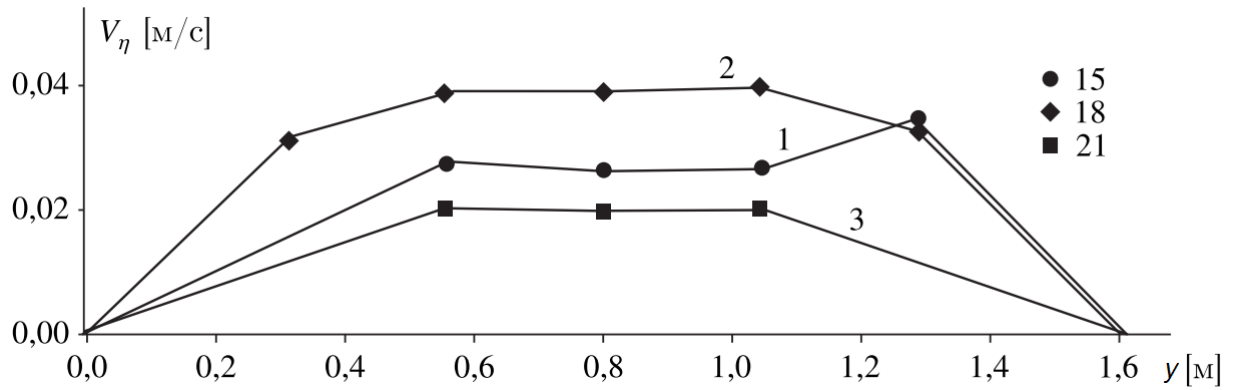


Рисунок 3.14 – Точечные экспериментальные данные полей скорости на поверхности потока в створах канала 15, 18 и 21 [7] и их аппроксимация 1, 2, 3, использовавшаяся в качестве граничных условий V_η

Поля скоростей U , V и W функций тока Φ и вихря ω , полученные в створе 18. Поля визуализированы градиентной заливкой, масштаб полей определен их изолиниями. Поле вихря имеет ярко выраженный пограничный характер и масштабируется сеточными вставками с числовыми значениями поля в узлах сетки. Особенно сильно это заметно в створе 15 канала (см. 3.16(a)), когда расчетные и экспериментальные скорости у вогнутого берега канала имеют качественные отличия. В створах 18 и 21 расчетные и экспериментальные радиальные скорости потока достаточно хорошо согласуются между собой, их отличия не превышают 17 %.

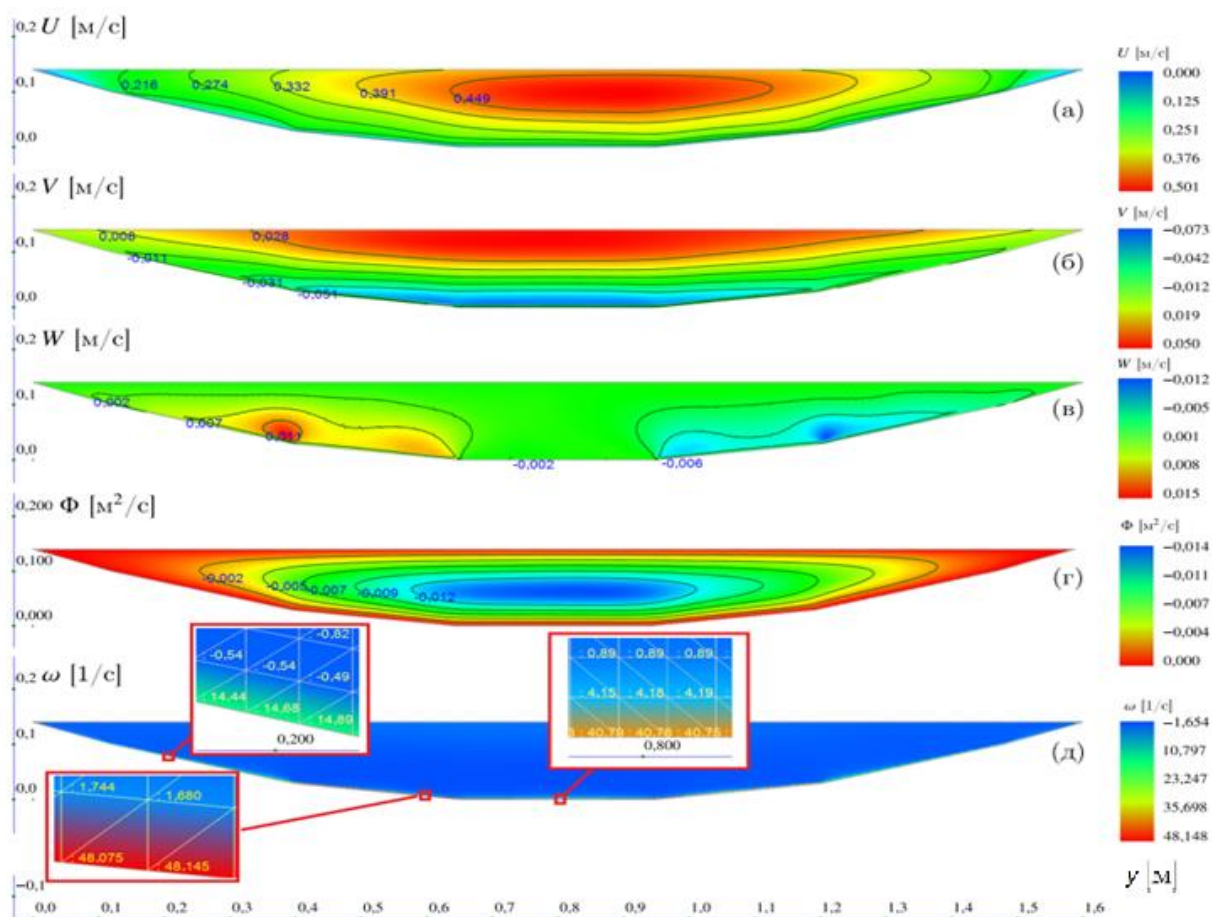


Рисунок 3.15 – Расчетные поля окружной, радиальной и вертикальной скоростей, функции тока и функции вихря для 18-го створа

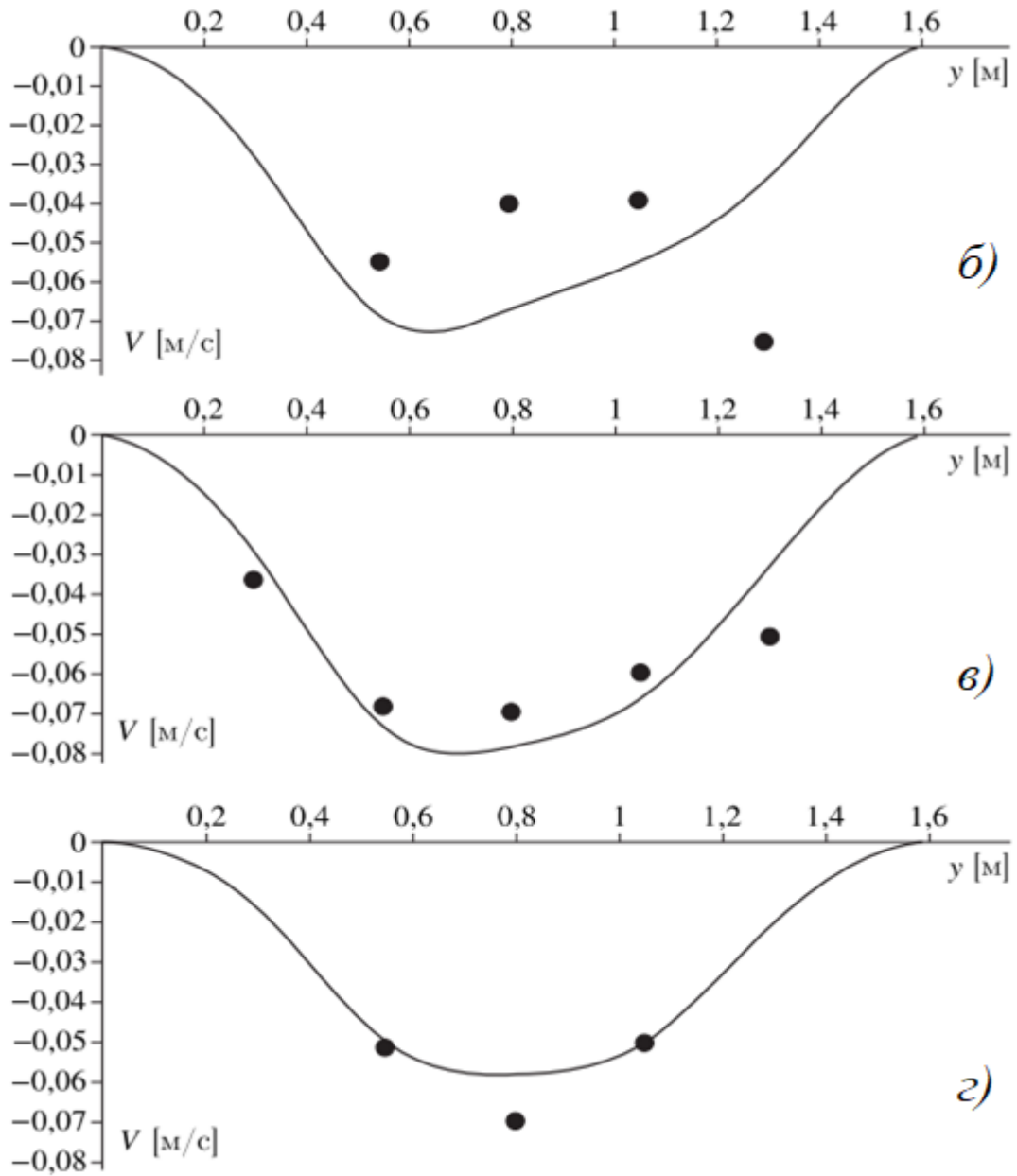


Рисунок 3.16 – Сравнение расчетных придонных радиальных скоростей потока (кривые), полученных на расстоянии 0,05Н от дна канала, с экспериментальными данными Розовского [7] в створах 15 (а), 18 (б) и 21 (в) соответственно

3.8. Решение задачи о движении установившегося потока в створе русла.

Для валидации предложенной математической модели (3.1) - (3.8) также решен ряд гидродинамических задач для створа естественного русла реки Десны.

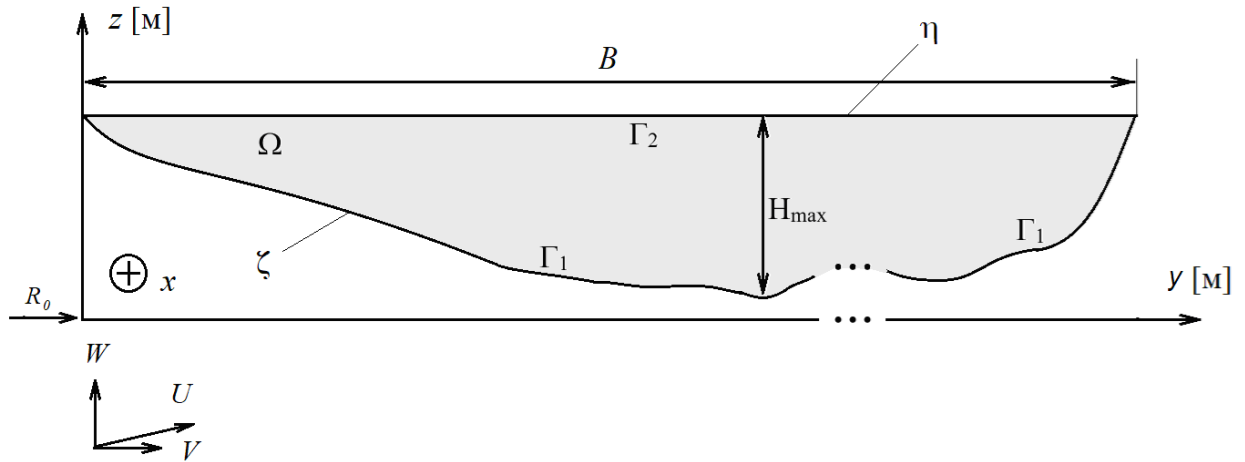


Рисунок 3.17 – Геометрия расчетной области Ω , являющейся радиальным сечением (створом) канала и ее границы $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $H_{\max}$ – максимальная глубина потока, R_0 - расстояние от начала оси вращения до начала расчетной области, B - ширина канала, (U, V, W) – компоненты вектора скорости, осредненные по Рейнольдсу и согласованные с координатными осями (x, y, z)

Основной отличительной особенностью данных задач является уникальность геометрии каждого створа меандра, в которых ищется решение. При этом основным критерием применимости валидируемой модели является выполнение условия сохранения массы в створе реки. Для проверки данной гипотезы был выполнен ряд численных экспериментов для гидродинамического потока, протекающего в створах реки Десны расположение которых показано на рис. 3.18. Характеристики русла, формы створов и значение полей скорости на свободной границе потока были взяты из работы [7]. С помощью предложенной математической модели и алгоритма, изложенного в 3.5, была решена задача о течении речного потока в 4-х створах реки Десны, геометрия створов приведена в таблице 3.3 и согласуется с данными натурного исследования [7]. Расчеты искомых полей в створах канала выполнялись для потока с расходом $Q_w = 184 \text{ м}^3/\text{с}$, средней скоростью потока $\bar{U}_1 = 0.47 \text{ м/с}$, $\bar{U}_3 = 0.4 \text{ м/с}$, $\bar{U}_4 = 0.38 \text{ м/с}$, $\bar{U}_5 = 0.38 \text{ м/с}$ в каждом створе и средним радиусом закругления канала $\bar{R} = 400$ во всех рассматриваемых створах, площадь створов составляла $\bar{S}_1 = 460 \text{ м}^2$, $\bar{S}_3 = 484 \text{ м}^2$, $\bar{S}_4 = 490 \text{ м}^2$ и

$\bar{S}_5 = 457 \text{ м}^2$, средний уклон русла $J = 0.0000274$. Приведенные данные согласуются со значениями натурных измерений [7]. Моделирование течения в створе 2 не проводилось ввиду недостаточности натурных данных о форме створа и полях скорости потока в работе [7].

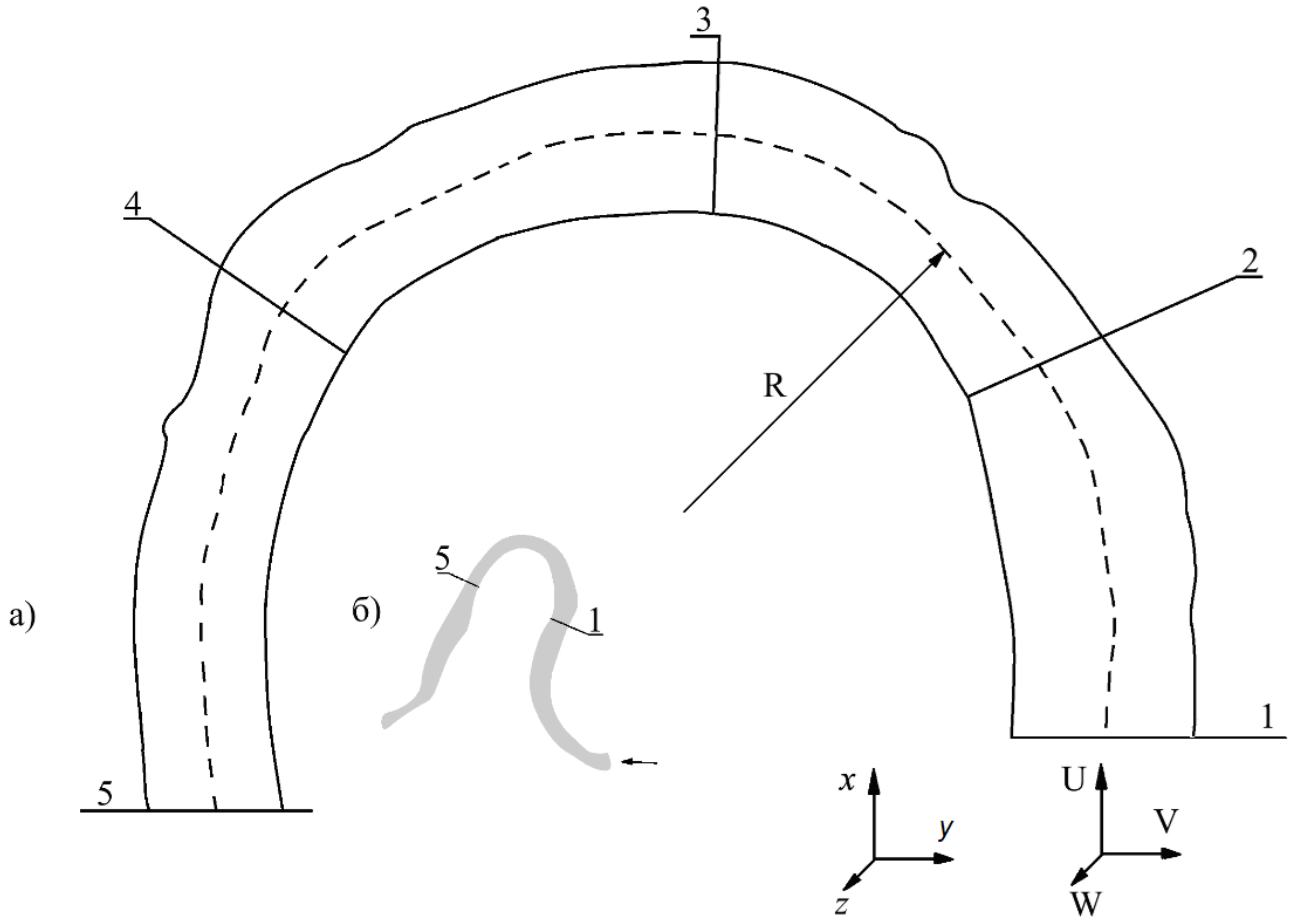


Рисунок 3.18 – Расположение створов (1, 2, 3, 4 и 5) на плане экспериментального участка реки Десны [7], R - средний радиус закругления канала, (U, V, W) - компоненты вектора скорости, осредненной по Рейнольдсу, в створах канала, согласованное с координатными осями (x, y, z) (а), расположение рассматриваемого участка от створа 1 до створа 5 на общем плане реки (б)

Вычисления проводились на нерегулярной конечно-элементной сетке. Сеточная сходимость задачи проверялась последовательным сгущением расчетной сетки. Были выбраны репрезентативные расчетные сетки, содержащие 35 314, 71 7479, 29 214, 57 720, 61 748 конечных элемента соответственно для створов 1, 2, 3, 4 и 5, со средним диаметром конечного

элемента $h = \frac{\sqrt{\Omega_e}}{2} \approx 0.2 \text{ м}$.

В таблице 3.3 приведены отметки донной поверхности Γ_1 , которые отсчитываются от внутренней до внешней границы канала, глубина потока H в данных отметках для всех рассматриваемых в работе створов из работы [7].

Таблица 3.3 – отметки донной поверхности и глубины

Створ 1		Створ 3		Створ 4		Створ 5	
r [м]	H [м]	r [м]	H [м]	r [м]	H [м]	r [м]	H [м]
0	0.00	0	0	29	0	2	0
4	1.55	28.5	0.3	34	0.55	6	0.3
10.5	3.30	33	0.6	39	0.8	8	0.8
19	3.30	34	0.8	43.5	1.45	10	1.2
27	3.60	38	1.2	48.5	1.4	12.5	1.6
34.5	3.65	41.5	1.6	52	1.5	15	1.9
42.5	3.70	45	1.8	56	2.2	19	2.2
53	3.75	50	1.9	63.5	2.8	21.5	2.6
60	3.40	53.5	1.8	69.5	3.15	27.5	3.9
65	3.30	58	2	74	3.6	32	3.4
70.5	3.40	64.5	2.4	78.5	4	37	3.2
80.5	3.45	68	2.6	83.5	4	41.5	3.8
89.5	3.00	72	2.8	89	4.25	47.5	4.2
98.5	3.00	77	3.4	93	4.6	53	4.2
109.5	2.95	83	3.4	99.5	4.7	58	4.6
122	2.55	88	4	104.5	5	60	4.15
135.5	2.80	90	3.8	113	5.4	63	4.6
147	2.05	99	5	120	6.6	67	4.4
148.5	1.40	103	5.2	127	6.05	75	5.2
157.5	0.00	109	5.2	130	5.95	81.5	5
		118.5	6.1	134	6.1	88.5	5.2

		124.5	7.6	139.5	6	94.5	5.4
		127.5	6	146.5	5.6	104	6.5
		131	6	151	3	106	5.4
		141.5	4.8	155	1.2	113.5	3.9
		145	5.25	160	0	117.5	1.4
		151	3.2			120	0
		157	2.2				
		159.5	0				

При вычислении искомых полей необходимо задавать значения функции U_{Γ_2} на свободной поверхности потока (верхней границе расчетной области Γ_2) для удовлетворения граничных условий (5). Для получения функции U_{Γ_2} использовалась линейная аппроксимация по значениям окружных скоростей на свободной поверхности потока в вертикалях каждого створа, которые приведены в таблице 3.4 из работы [7].

Таблица 3.4 – значения окружных скоростей на свободной поверхности потока

Створ 1						
y [м]	19	42.5	65	89.5	109.5	135.5
U_{Γ_2} [м/с]	0.62	0.72	0.73	0.55	0.43	0.31
Створ 3						
y [м/с]	50	72	90	109	127.5	145
U_{Γ_2} [м/с]	0.27	0.47	0.52	0.47 / 0.55	0.54 / 0.5	0.55
Створ 4						
y [м/с]	52	74	99.5	120	139.5	
U_{Γ_2} [м/с]	0.41	0.40	0.45	0.53/0.49	0.46	
Створ 5						
y [м/с]	15	27.5	37	60	81.5	104
U_{Γ_2} [м/с]	0.23	0.3	0.4	0.54	0.59	0.56

V_{Γ_2} [м/с]	0.0175	0.0275	0.0225	0.03	0.015	0
----------------------	--------	--------	--------	------	-------	---

На рис. 3.19 – 3.26 показаны профили потоковой и радиальной скоростей в вертикалях створа, вертикали располагаются слева направо по мере возрастания расстояния от левого берега створа. Экспериментальные измерения для каждой вертикали створа показаны на рисунках черными кружками, соединенными тонкой черной линией в областях, где данные двух смежных вертикалей накладываются друг на друга. Для каждого створа было получено численное решение по двум алгебраическим моделям турбулентности: модель van Rijn (7) и модель van Driest (8), при сравнении решений с экспериментом оказалось, что в случае моделирования створа 1 наилучшее согласование с экспериментом показала модель van Driest, так она лучше воспроизводит картину течения в каналах с «трапецевидной» формой створа. Для створов 3, 4 и 5, имеющих форму русла, близкую к форме треугольника или скошенной параболы, лучшее согласование показала модель van Rijn [47], где версия предложенной модели, замкнутая моделью турбулентности van Rijn, была успешно апробирована при решении задачи о течении в створе параболической формы. Различия между вычисленными и экспериментальными значениями скорости на вертикалях оценивались в норме L_2 для всех рассматриваемых створов.

На рис. 3.19 показаны решения для створа 1. Видно, что решение по предложенной модели качественно полностью согласуется с экспериментом, хорошо воспроизводит форму и наполненность профиля потоковой скорости и распределение радиальной скорости потока. При количественном сравнении, только в вертикали 3 расчетный профиль значительно отклоняется от экспериментального, погрешность достигает 22 %, в остальных сечениях средняя относительная погрешность не превышает 10 %.

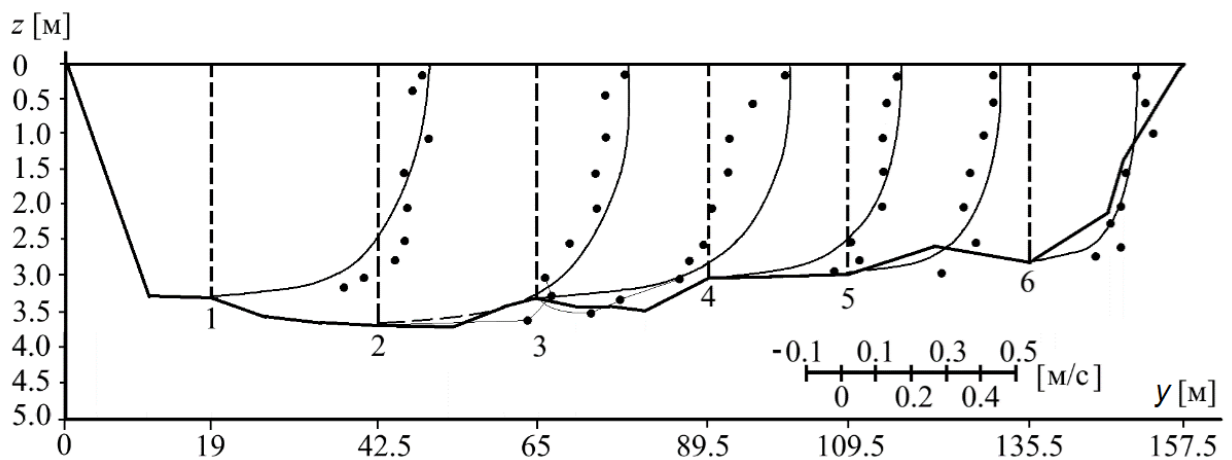


Рисунок 3.19 – Графики потоковых скоростей в створе 1 в различных вертикалях створа

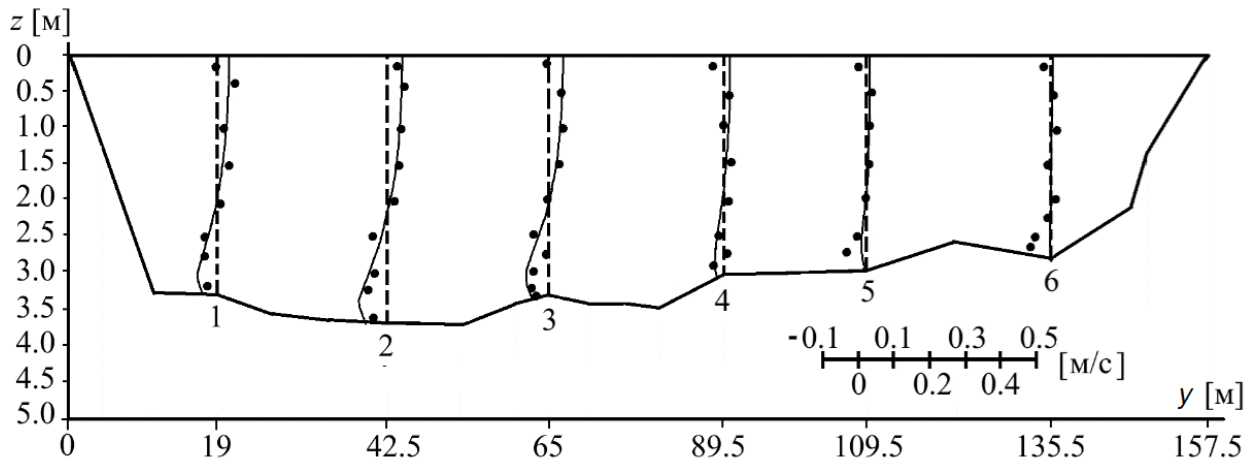


Рисунок 3.20 – Графики радиальных скоростей в створе 1 в различных вертикалях створа

При сравнении графиков радиальной скорости на рис. 3.20 видно, что максимальное рассогласование расчетных данных с экспериментальными данными отмечается на верхней границе створа практически для всех вертикалей. Все экспериментальные отметки радиальной скорости на верхней границе потока смещены влево относительно остальных отметок, расположенных в верхней половине потока. Вероятно, это связано с существованием ветровой нагрузки на свободную поверхность потока во время проведения измерений, что породило приповерхностное течение, которое не может быть воспроизведено в расчетах по предложенной модели. На вертикалях 5 и 6 значения радиальной скорости имеют существенную погрешность в придонной области. Такое расхождение, может быть связано с тем, что данный створ, находится в месте перегиба кривизны русла, где одна меандра переходит в другую и изгиб реки меняет направление, предложенная модель не может учесть данное явление.

В остальном расчетные радиальные скорости хорошо согласуются с экспериментальными данными, средняя относительная погрешность составляет 15%, достигая 34% в местах, где экспериментальные поля скорости имеют вид ломаных линий.

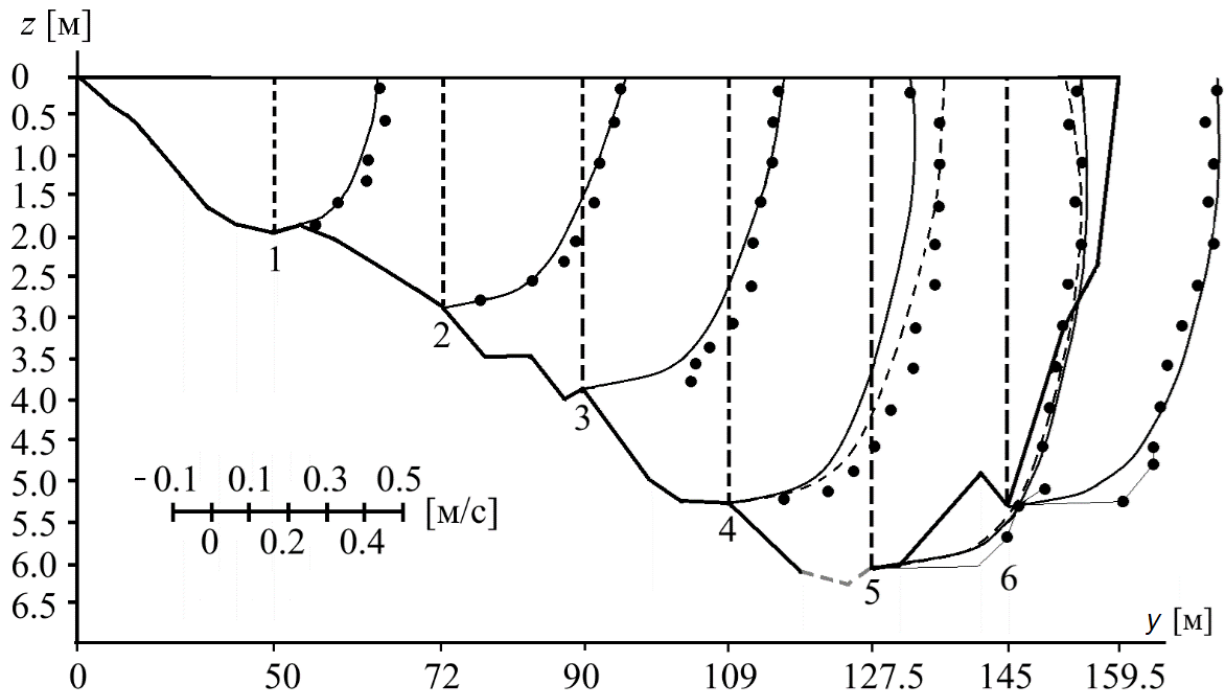


Рисунок 3.21 – Графики потоковых скоростей в створе 3 в различных вертикалях створа

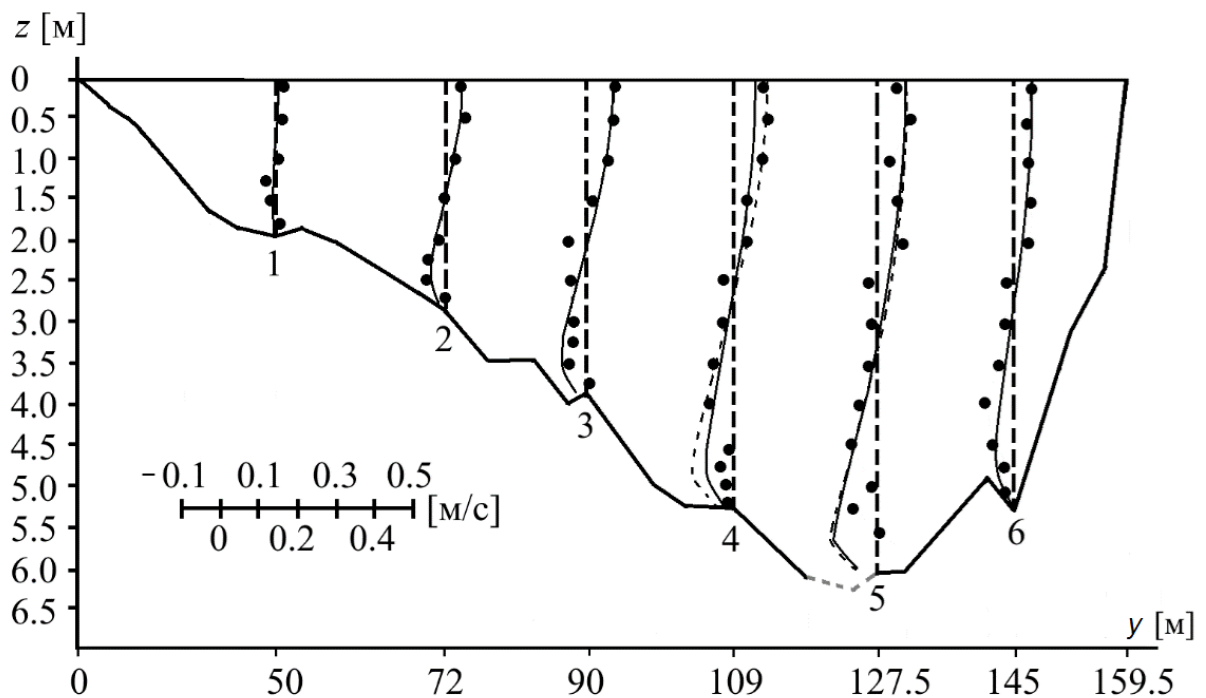


Рисунок 3.22 – Графики радиальных скоростей в створе 3 в различных вертикалях створа

На рис. 3.21 и 3.22 приводится сравнение измеренных и расчетных скоростей в створе 3, который находится в середине излучины. При сравнении данных о потоковых скоростях в створе видно, что модель качественно и количественно согласуется с экспериментом, максимальное

отклонение графиков наблюдается для вертикали 4, достигая 19.9 % в приповерхностной области потока. В настоящее время нет понимания причин существования в экспериментальных данных приповерхностное торможение потока в 4 и 5 вертикали. Изменение граничных условий в этих вертикалях, взятое из интерполяции профилей скорости на свободную поверхность, привело к уменьшению общей ошибки расчета для потоковой скорости до 13 % (интерполяционные значения скоростей указаны в таблице 3.4 через знак «/» в соответствующей ячейке). Профили радиальной скорости качественно и количественно согласуются с экспериментом, средняя относительная погрешность по области составляет около 14 %. Однако, в донной части вертикалей 4 и 5 ошибка достигает 75%, что, вероятно, связано с непостоянным, пульсирующим маленьким завихрением в этой области, это отображено широким разбросом экспериментальных точек в этом месте и отсутствием точных измерений глубины потока, выполненных автором [7] (отображено на рис. 3.21 и 3.22 пунктирной серой линией).

На рис. 3.23 и 3.24 приводится сравнение измеренных и расчетных скоростей в створе 4. Из сравнения полученного решения с экспериментом следует, что максимальная погрешность отклонения расчетной потоковой скорости наблюдается в вертикали 4, достигая 16.3 %. Выполняя интерполяцию для данной вертикали по технике, описанной ранее, удалось уменьшить максимальную погрешность до 9.1 % в вертикали 4. На остальных вертикалях области средняя относительная погрешность составляет около 6 %, достигая 12 % в местах, где экспериментальные данные имеют вид ломаных линий. Радиальные скорости в створе 4 хорошо согласуются с экспериментом в вертикалях 1-3 с погрешностью 15 %; в вертикали 3 имеется рассогласование в придонной области, где погрешность достигает 41%; в средней и придонной части вертикали 4 количественное сравнение затруднительно, поскольку экспериментальные данные имеют пилообразный вид, что, вероятно, свидетельствует о наличии в области измерений вихревых образований потока с небольшим характерным размером, что порождает значительные пульсации потока. Причиной их образования, возможно, является конфузорный характер русла в окрестности створа, что видно на рис. 3.18. Вероятно, конфузорность русла порождает придонный обратный поток, который наблюдается на вертикали 5 (экспериментальные данные отсутствуют в придонной области и дважды пересекают нулевую отметку в средней части потока) и который не может быть воспроизведен в рамках предложенной модели.

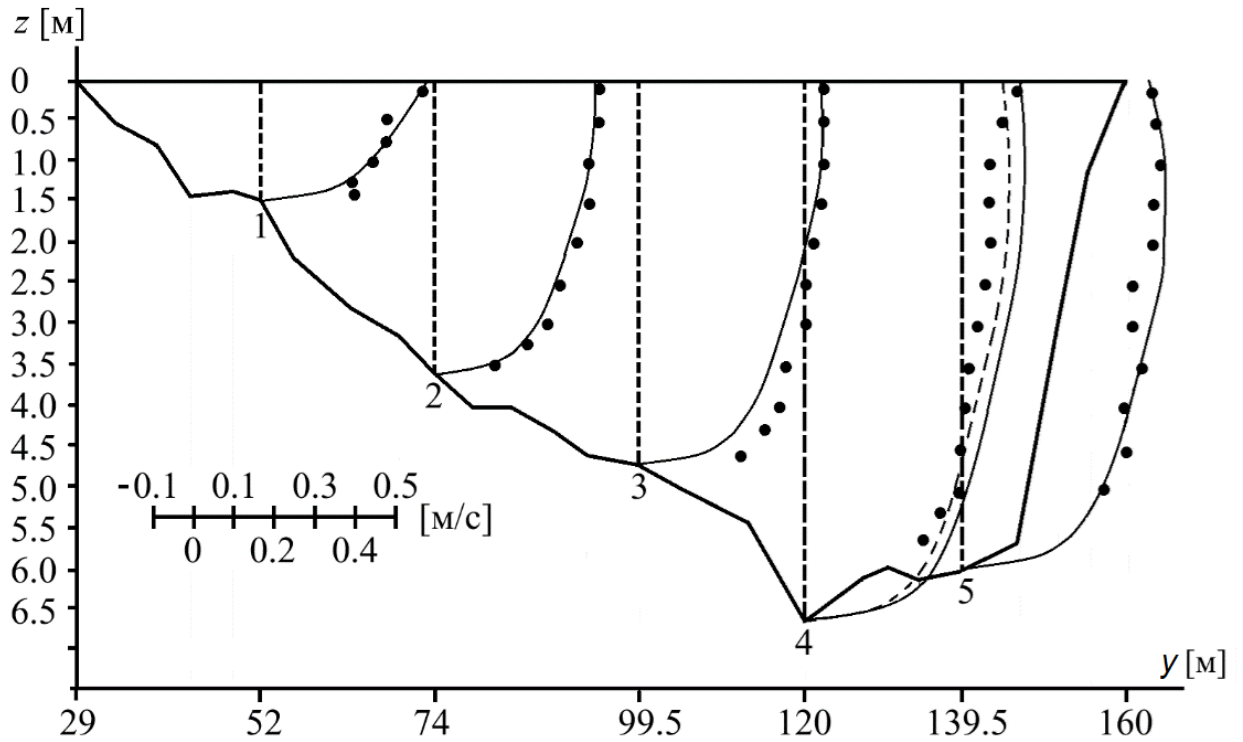


Рисунок 3.23 – Графики потоковых скоростей в створе 4 в различных вертикалях створа

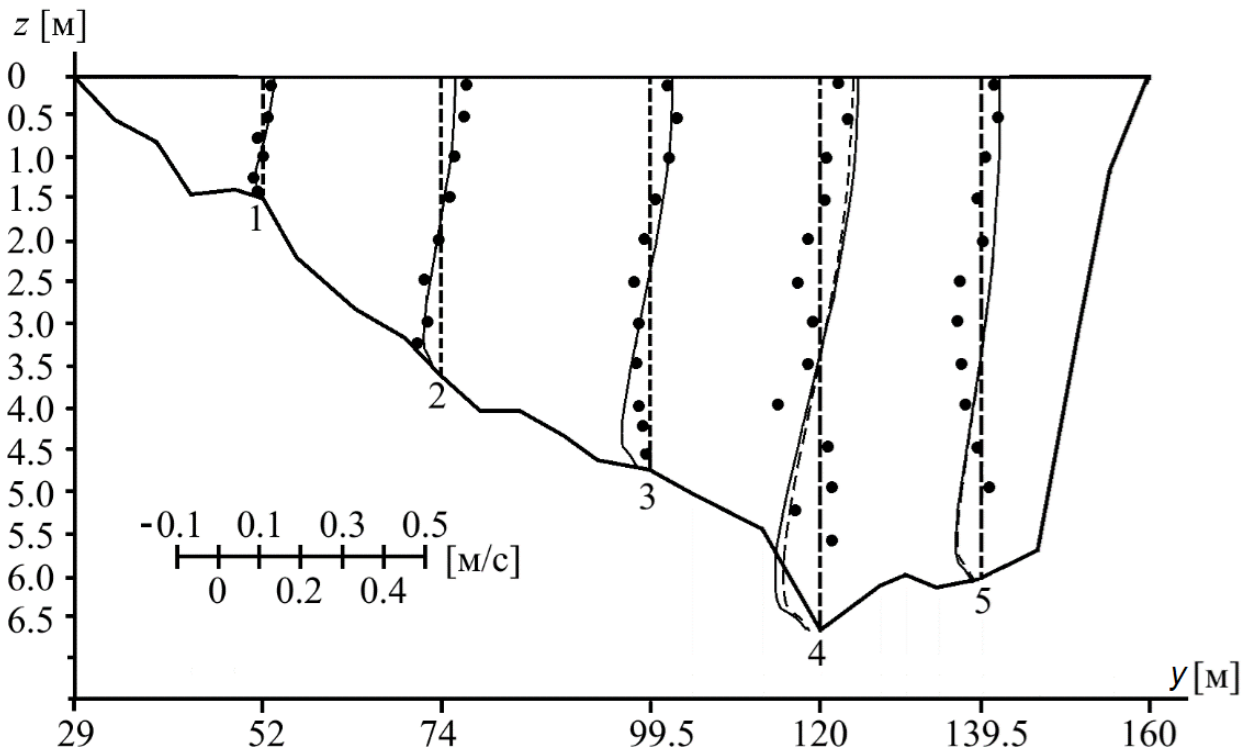


Рисунок 3.24 – Графики радиальных скоростей в створе 4 в различных вертикалях створа

На рис. 3.25 и 3.26 приведены поля потоковой и радиальной скоростей в створе 5. Данный створ располагается в конце излучины, где русло выходит на прямолинейный участок. В силу двойственности своего расположения для

данного створа было выполнено два расчета. Результаты расчетов показаны на рис. 3.25, 3.26 сплошными линиями для цилиндрической ($\sigma = 1$) постановки задачи и пунктирными линиями для плоской постановки задачи ($\sigma = 0$).

При расчете задачи в плоской постановке на свободной поверхности помимо граничных условий для скорости U задавались граничные условия Дирихле для скорости V согласно [46]. Значения радиальной скорости для створа 5 показаны в таблице 3.4.

На рис. 3.25 и 3.26 показаны полученные результаты и экспериментальные данные для створа 5. При сравнении видно, что решение, полученное в «плоской» постановке, существенно лучше согласуется с экспериментом для потоковой и радиальной скорости. Средняя относительная погрешность составляет 8 % для потоковой скорости и 30 % для радиальной скорости.

Отметим, что решение, полученное в цилиндрической постановке, приводит к значительным погрешностям, более 100%, для радиальных скоростей, что связано с особенностью предложенной модели, которая не предусматривает автоматического перехода к плоской постановке при выходе русла на прямолинейный участок.

Численные исследования подтверждают возможность редукции трехмерной модели движения речного потока к двумерной модели потока в плоскости створа канала. При этом основным критерием применимости валидируемой модели является выполнение условия сохранения массы в створе реки. Показано, что в качестве дополнительных условий для редукции задачи достаточно задания граничных условий на свободной поверхности потока для продольной компоненты скорости U , что отличает предложенную в данной работе математическую модель от предыдущих ее версий, описанных в работах [46, 47].

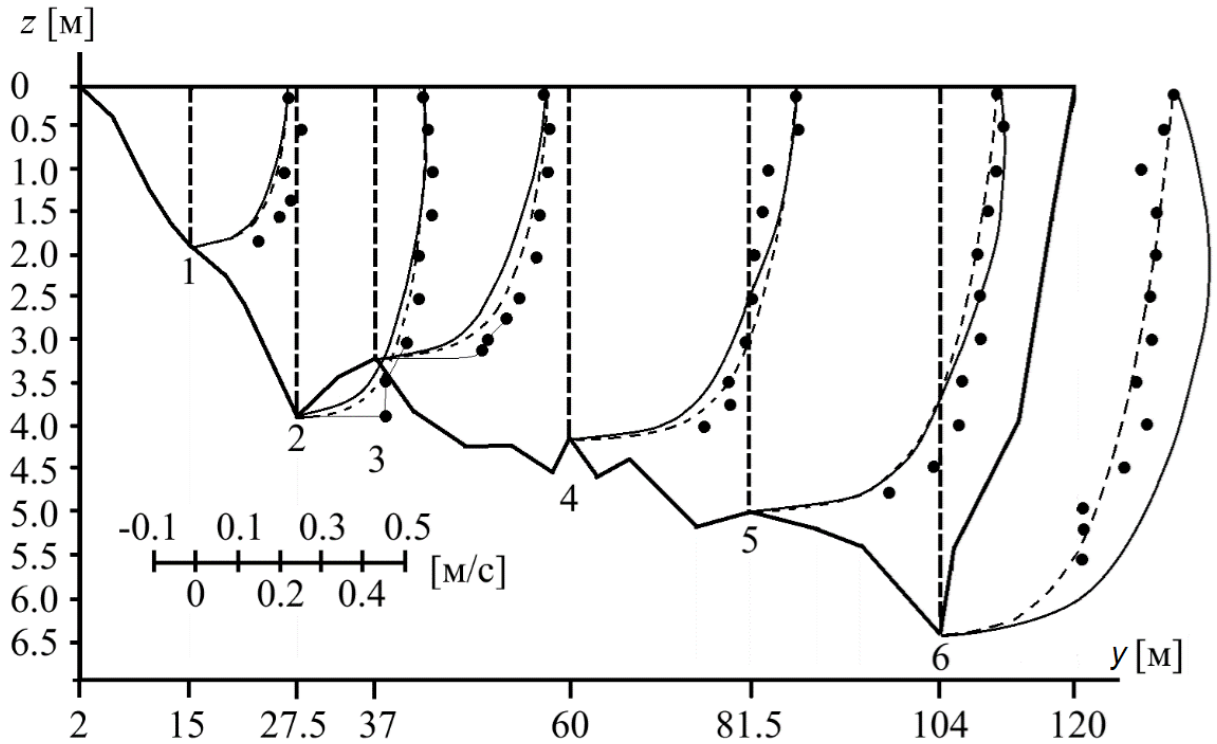


Рисунок 3.25 – Графики потоковых скоростей в створе 5 в различных вертикалях створа

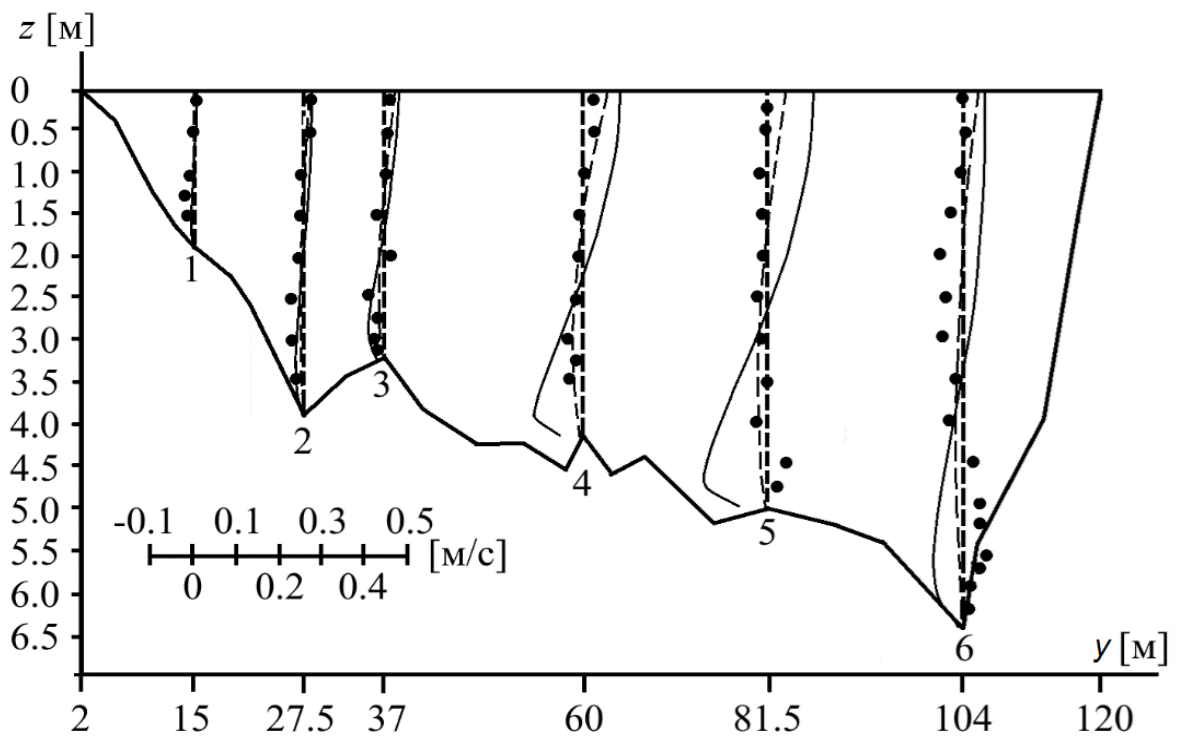


Рисунок 3.26 – Графики радиальных скоростей в створе 5 в различных вертикалях створа

Сравнение вычисленных полей скорости с результатами экспериментальных измерений Розовского [7] показывает хорошую

согласованность расчетных и экспериментальных полей для скорости U , средняя относительная погрешность по области варьируется в пределах 6-10 % для потоковой скорости во всех рассмотренных створах. Погрешности по полю радиальной скорости V в створах канала изменяются в пределах 14-30 %.

В ходе моделирования створов реки Десны было выявлено, что предложенная модель чувствительна к недостаточности данных, которые используются для установки граничных условий для потоковой скорости U . В створе 3 искажения в значениях скорости U на свободной поверхности потока на 17 % привело к возрастанию погрешности решения на 9.5 % по всей вертикали створа, но не привело к искажениям решения на смежных вертикалях. На примере расчетов, выполненных для створа 5, показано, что для моделирования потока на выходе из излучины необходимо использовать «плоскую» постановку задачи.

3.9. Заключение.

В данной главе получены следующие новые результаты:

1. Предложена математическая модель задачи о течении стационарного турбулентного спокойного речного потока в створе канала. Задача сформулирована в смешанной постановке скорости–вихрь–функция тока с учетом гипотезы о слабом влиянии изменений окружных членов уравнений Рейнольдса на гидродинамическую картину в створе. В качестве граничных условий необходимо определить скорости на свободной поверхности потока, определяемые в нормальном и касательном направлении к оси створа. Предполагается, что значения данного поля скорости должно быть определено из решения вспомогательных задач или получено из данных натурных или экспериментальных измерений.

2. Для численного решения сформулированной задачи используется метод конечных элементов в формулировке Петрова–Галеркина. В работе получен дискретный аналог задачи и предложен алгоритм ее решения. Выполненные численные исследования показали в целом хорошую согласованность полученных решений с известными экспериментальными данными. Погрешности численных результатов связаны с необходимостью более точного определения радиальной компоненты поля скорости в створе потока путем подбора и калибровки более подходящей модели вычисления турбулентной вязкости и более точного определения граничных условий на свободной границе створа.

3. Выполненные численные исследования подтверждают возможность редукции трехмерной модели движения речного потока к двумерной модели потока в плоскости створа канала и справедливость выдвинутой гипотезы.

Глава 4. Исследование береговых процессов в створах рек (каналов)

С применением математических моделей, представленных в первой главе, в данной главе описано решение ряда прикладных задач. Полученные решения сравнивались с известными данными экспериментальных и натурных наблюдений. На основе выполненных сравнений сделано заключение об адекватности и валидности предложенных моделей предложены пути расширяющие возможную область ее применения.

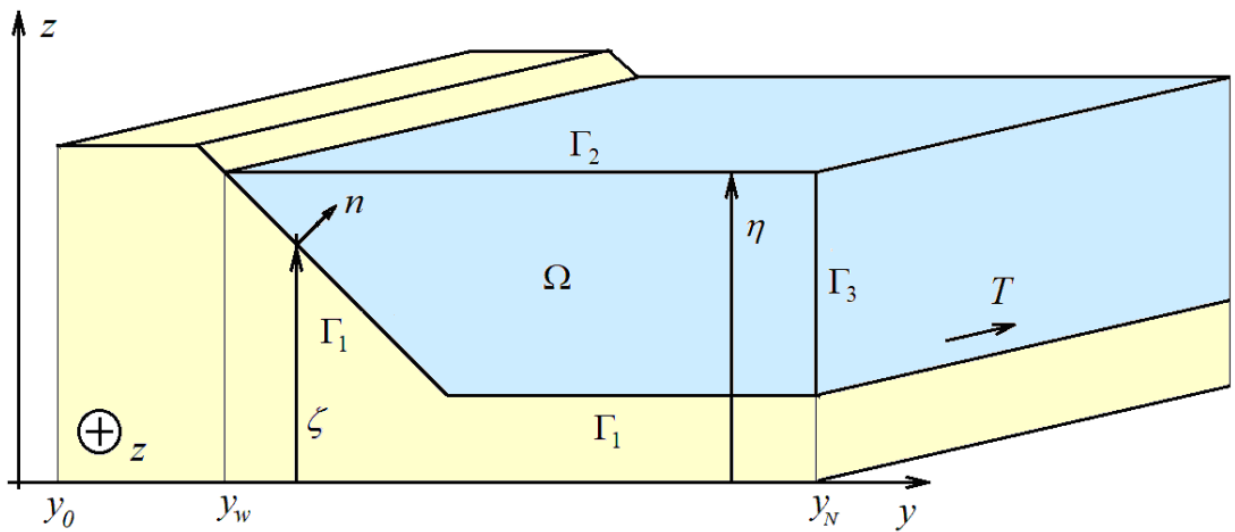


Рисунок 4.1 – Геометрия расчетной области Ω и ее границ

4.1 Математическая постановка задачи, метод и алгоритм ее решения

4.1.1 Физическая постановка задачи

В главе сформулирована модель задачи о развитии процесса эрозии берегового склона с учетом возможного изменения расхода транзитных наносов во времени. Поскольку характерное время установления гидродинамических параметров потока много меньше характерного времени изменения его расхода [38, 39], гидродинамический поток описан в рамках квазистационарного приближения. Однако предлагаемая модель может учитывать потерю массы в створе канала за счет введения поправки на ненулевой градиент транзитного расхода вдоль оси канала. Турбулентная вязкость потока изменялась во времени из-за изменений геометрии расчетной

области, уровня свободной поверхности потока и расхода потока. Для описания изменения донных и береговых отметок русла использовалась аналитическая модель движения наносов, предложенная в работах [38, 39].

Рассмотрена задача об эволюции берегового склона песчаного канала $\zeta = \zeta(t, y)$, трапецевидного в начальный момент времени. Геометрия расчетной области Ω для определения параметров гидродинамического потока и ее границы $\Gamma = \bigcup \Gamma_k$ схематично представлены на рис. 4.1. Русло канала имело постоянный малый продольный уклон J в направлении движения гидродинамического потока, движущегося в поле силы тяжести. Изменения донно-береговых отметок z в направлении оси x происходили по линейному закону

$$Z(t, x, y) = \zeta(t, y) - xJ, \quad J = -\frac{\partial Z}{\partial x} = \text{const}.$$

Ввиду симметрии русла расчет изменения поперечного сечения канала выполнялся только для левой половины сечения. Подвижная граница Γ_1 задана неизвестной функцией $\zeta = \zeta(t, y)$, которую необходимо было определить, описывающей смоченную береговую и донную поверхности и сухой береговой склон. Γ_2 – свободная поверхность потока, изменяющаяся во времени вследствие изменения геометрии донной поверхности, Γ_3 – граница, совпадающая с центром симметрии канала, изменяющаяся вследствие изменения глубины потока.

4.1.2 Математическая постановка задачи

Математическая постановка задачи содержит в себе уравнение Рейнольдса для квазиустановившегося гидродинамического потока (1.33) с граничными условиями (1.34), (1.35). Т.е. предполагается, что установившийся поток в створе канала зависит только от координат створа y и z , получим уравнение движения потока в створе канала [18, 29, 55]

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + Q_x = 0, \quad (y, z) \in \Omega, \quad (4.1)$$

замыкаемое граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (y, z) \in \Gamma_3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (y, z) \in \Gamma_2, \quad (4.2)$$

$$u = 0 \quad (y, z) \in \Gamma_1. \quad (4.3)$$

Здесь u – осредненная по Рейнольдсу скорость речного потока в области Ω , $\mu = \mu_0 + \mu_t$, μ_t – турбулентная вязкость потока, μ_0 – молекулярная вязкость потока, $Q_x = \rho_w g J$, J – уклон речного русла, $H = \eta - \zeta$ – глубина потока, g – ускорение свободного падения, η и $\zeta = \zeta(r)$ – отметки свободной поверхности потока и донной поверхности русла соответственно, ρ_w – плотность воды. Расчетная область Ω снизу ограничена подвижной донной поверхностью $\zeta = \zeta(t, y)$, эволюция которой описывается уравнениями (1.34) – (1.40). Задача (4.1) – (4.3), (1.43) – (1.47) замыкается алгебраической моделью турбулентной вязкости Лео К. ван Рейна [100]

$$\mu_t = \rho_w \kappa u_* H(y) \begin{cases} \left(1 - \frac{z}{H(y)}\right) \left(\frac{z}{H(y)}\right), & \frac{z}{H(y)} < 0.5 \\ 0.25, & \frac{z}{H(y)} \geq 0.5 \end{cases}, \quad u_* = \frac{\kappa U_b}{\ln(z_b / z_0)}, \quad (4.10)$$

где U_b – скорость U на расстоянии $z_b = 0.05H$ от дна $z_0 = 0.03k_s$, k_s – эффективная высота шероховатости дна.

Для расчета коэффициентов уравнения (4.7)-(4.10) вычислялись придонные касательные напряжения

$$T = \rho_w u_*^2. \quad (4.11)$$

4.1.3 Метод решения задачи

Рассмотрим слабую вариационную формулировку Галеркина для задачи (4.1)–(4.6), (1.43) – (1.47) с набором пробных функций $\{N_\alpha, L_\alpha\} \in L_2(\Omega)$. В задаче необходимо найти неизвестные функции $\{U^h, \zeta^h\} \in L_2(\Omega)$, такие, что:

$$\int_{\Omega} \mu \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial u^h}{\partial y} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial u^h}{\partial z} \right) d\Omega = \int_{\Omega} N_\alpha \rho_w g J d\Omega, \quad (4.12)$$

$$\int_{\Gamma_1} \left(L_\alpha \left((1-\varepsilon) \frac{\partial \zeta^h}{\partial t} + q_x \right) + \Lambda \frac{\partial L_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \zeta^h}{\partial y} \right) dy = 0. \quad (4.13)$$

Уравнения (4.83)–(4.84) замыкаются краевыми условиями

$$u = 0, \quad (r, z) \in \Gamma_1, \quad (4.14)$$

$$\zeta(y_L, t) = \eta(t), \quad \zeta(y_R, t) = \eta(t), \quad 0 \leq t \leq T_S. \quad (4.15)$$

Уравнение (4.84) замыкается начальными условиями

$$\zeta(0, y) = \zeta_0(y), \quad 0 \leq y \leq W, \quad t = 0. \quad (4.16)$$

4.1.4. Дискретный аналог задачи

Используем метод конечных элементов в формулировке Галеркина. Разобьем расчетную область Ω на трехузловые конечные элементы Ω_e , $\Omega^h = \bigcup_e \Omega_e$. Введем на конечном элементе функции формы [105] N_α :

$$N_\alpha = \frac{1}{2\Omega_e} (a_\alpha + b_\alpha y + c_\alpha z), \quad (4.17)$$

и их градиенты

$$b_\alpha = \frac{\partial N_\alpha}{\partial y}, \quad c_\alpha = \frac{\partial N_\alpha}{\partial z},$$

$$\text{здесь } \begin{cases} a_1 = y_2 z_3 - y_3 z_2, & b_1 = z_2 - z_3, & c_1 = y_3 - y_2, \\ a_2 = y_3 z_1 - y_1 z_3, & b_2 = z_3 - z_1, & c_2 = y_1 - y_3, \\ a_3 = y_1 z_2 - y_2 z_1, & b_3 = z_1 - z_2, & c_3 = y_2 - y_1, \end{cases} \quad \Omega_e = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{bmatrix},$$

где y_k, z_k – координаты вершин (узлов) конечного элемента, Ω_e – площадь конечного элемента. Для уравнения донных деформаций расчетную область Γ_1 разобьем на двухузловые конечные элементы Γ_e , $\Gamma_1 = \bigcup_e \Gamma_e$ с функциями формы L_α :

$$L_1 = \frac{y - y_1}{h_e}, \quad L_2 = 1 - \frac{y - y_1}{h_e}, \quad h_e = y_2 - y_1. \quad (4.18)$$

Определим аппроксимацию искомых функций на конечном элементе

$$U^h = N_\alpha u_\alpha, \quad \mu_e^h = N_\alpha \mu_{e\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (4.19)$$

$$\zeta^h = L_\alpha \zeta_\alpha \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.20)$$

где $u_\alpha, \mu_{e\alpha}, \zeta_\alpha$ – значения искомых полей в α -х узлах конечного элемента, в выражениях (4.19), (4.20) и далее ниже по тексту, где это не приводит к неоднозначностям, используется правило суммирования по «немым» узловым индексам ($N_\gamma u_\gamma \equiv \sum_{\gamma=1}^3 N_\gamma u_\gamma$), $\mu_{e\alpha}$ – значение функции приведенной вязкости в узлах конечного элемента, $\bar{\mu}_e$ – осредненные величины функции вязкости на конечном элементе.

Используя интерполяцию (4.17) – (4.20), преобразуем интегральные тождества (4.83) – (4.84) в дискретные аналоги задачи

$$K_{\alpha\beta} u_\beta + F_\alpha = 0, \quad (4.21)$$

$$\left[\frac{M_{\alpha\beta}}{\Delta t} + \theta K_{\alpha\beta}^z \right]^n \zeta_\alpha^{n+1} = \left[\frac{M_{\alpha\beta}}{\Delta t} - (1 - \theta) K_{\alpha\beta}^z \right]^n \zeta_\alpha^n + \theta Q_\alpha^{n+1} + (1 - \theta) Q_\alpha^n, \quad (4.22)$$

где

$$K_{\alpha\beta} = \bar{\mu}_e (b_\alpha b_\beta + c_\alpha c_\beta) \Omega_e, \quad F_\alpha = \rho_w g J \frac{\Omega_e}{3} [1 \quad 1 \quad 1]^T,$$

$$M_{\alpha\beta}^z = \rho \frac{h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad K_{\alpha\beta}^z = \frac{\bar{\Lambda}}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_\alpha = \bar{q}_{xx} \frac{h_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.1.5. Алгоритм решения задачи.

В начальный момент времени $t^0 = 0$ определяется начальная форма донно – береговой поверхности русла в створе $\zeta^0 = \zeta(t^0, y)$ и отметка свободной поверхности потока $\eta^0 = \eta(t^0)$.

Выполним расчет начальной придонной динамической скорости створа

$$u_* = \sqrt{g J R}, \quad R = S_\Omega / P, \quad S_\Omega = \int_{y_L}^{y_R} H(y) dy, \quad P = \int_{y_L}^{y_R} \sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta(y)}{dy} \right)^2} dy.$$

Проведем расчет начального поля вязкости для всех i - х узлов расчетной области $\Omega^{h,0}$

$$\mu_i = \mu_{ti} + \mu_0, \quad \mu_{ti} = \rho_w \kappa u_* H(y_i) \left\{ \left(1 - \frac{z_i}{H(y_i)} \right) \left(\frac{z_i}{H(y_i)} \right), \quad \frac{z_i}{H(y_i)} < 0.5, \right. \\ \left. 0.25 \right\}$$

На начальном шаге по времени $t^0 = 0$ определяется начальная форма донных отметок русла в створе $\zeta_i = \zeta_i(t^0, y)$ и задается отметка свободной поверхности потока $\eta = \eta(t^0)$.

Выполним следующие циклические действия.

1. По функциям ζ_i и η определяется форма расчетной области $\Omega = \Omega(t^n)$, для которой генерируется конечно – элементная сетка $\Omega^{h,n} = \Omega^h(t^n)$.

2. Для каждого i - го узла донной поверхности (за исключением первого последнего узлов) с радиус - вектором узла $\vec{x}_i = (y_i, z_i) \in \Gamma_1^n$ выполним расчет векторов $(\vec{\tau}_i, \vec{n}_i, \vec{p}_i$ и $\vec{p}_i^V)$ и поиск приграничных конечных элементов с функциями формы $N_\alpha(\vec{p}_i), N_\alpha(\vec{p}_i^V)$

$$\vec{\tau}_i = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_{i-1}, \quad \vec{n}_i = \left(-\frac{\tau_{i2}}{\sqrt{\tau_{i1}^2 + \tau_{i2}^2}}, \frac{\tau_{i1}}{\sqrt{\tau_{i1}^2 + \tau_{i2}^2}} \right),$$

$$\vec{p}_i = \vec{x}_i + h\vec{n}_i, \quad \vec{p}_i^V = \vec{x}_i + h_i^V \vec{n}_i, \quad h_i^V = 0.05H(y_i).$$

3. Вычислим скорость u_α в узлах сетки из решения системы алгебраических уравнений,

$$\bigcup (K_{\alpha\beta} u_\beta + F_\alpha) = 0,$$

для которой выполняются граничные условия Дирихле (2).

4. Вычислим текущую придонную динамическую скорость

$$u_*(y_i)^n = \frac{\kappa N_\alpha(\vec{p}_i^V) u_\alpha}{\ln(h_i^V / z_0)},$$

5. Вычислим значения придонных сдвиговых напряжений на границе Γ_1^n

$$T = \rho u_*^2$$

6. Вычислим значения отметок донной поверхности ζ_α^{n+1} на текущем шаге по времени

$$\bigcup \left(\left[\frac{M_{\alpha\beta}}{\Delta t} + \theta K_{\alpha\beta}^z \right]^n \zeta_\alpha^{n+1} = \left[\frac{M_{\alpha\beta}}{\Delta t} - (1-\theta) K_{\alpha\beta}^z \right]^n \zeta_\alpha^n + \theta Q_\alpha^{n+1} + (1-\theta) Q_\alpha^n \right)$$

7. Вычислим коррекцию отметок донной поверхности ζ_i^{n+1} на текущем шаге по времени с учетом возможного лавинного обрушения склона

$$\zeta_m^n = \zeta_m^n - \alpha_L \Delta_L, \quad \zeta_{m-1}^n = \zeta_{m-1}^n + \alpha_L \Delta_L$$

$$\Delta_L = \begin{cases} r + \Delta\zeta_m^n, & r < -\Delta\zeta_m^n, \\ 0, & r \geq -\Delta\zeta_m^n, \end{cases} \quad r = \Delta x \tan \varphi, \quad \Delta\zeta_m^n = \zeta_m^n - \zeta_{m-1}^n, \quad \alpha_L \approx 0.6.$$

8. Определим значение отметки свободной поверхности η^{n+1} на текущем шаге по времени.

9. Выполним перестроение сеточной области задачи $\Omega^{h,n+1}$.

10. Выполним интерполяцию $u_*(y_i)^n$ с границы Γ_1^n на границу Γ_1^{n+1}

11. Вычислим значения приведенной вязкости для всех узлов расчетной области $\bar{x}_i = (y_i, z_i) \in \Omega^{h,n+1}$

$$\mu_{ei} = \mu_{ti} + \mu, \quad \mu_{ti} = \rho_w \kappa u_*(y_i) H(y_i) \begin{cases} \left(1 - \frac{z_i}{H(y_i)}\right) \left(\frac{z_i}{H(y_i)}\right), & \frac{z_i}{H(y_i)} < 0.5 \\ 0.25, & \frac{z_i}{H(y_i)} \geq 0.5 \end{cases},$$

12. Вычислим значение текущего времени $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, если $t^{n+1} < t_{end}$ переходим на пункт 1, при $t^n > t_{end}$ прекращаем расчет.

Здесь $\bigcup[*]$ обозначает операцию сборки локальных конечно-элементных дискретных аналогов задачи в глобальную систему алгебраических уравнений задачи.

4.2 Валидация предложенной модели на задачах о размыве берегового откоса

4.2.1 Результаты моделирования для потоков с постоянным расходом

С использованием метода и алгоритма, предложенного в предыдущей главе, было получено решение для двух задач, исходные данные для которых взяты из работ [24, 36].

Геометрия каналов приведена в таблицах 4.1 и 4.2:

Таблица 4.1 – Геометрия канала

y	0	0.3	1.0	1.146	1.267	1.4
z	0.213	0.213	0.213	0.213	0.14	0.14

Таблица 4.2 – Геометрия канала

y	0	0.5	0.78	2.0
z	0.22	0.22	0.05	0.05

Физико-механические и гранулометрические свойства для донного материала в рассматриваемых задачах приведены в таблице 4.3:

Таблица 4.3 – физико-механические и гранулометрические свойства

	D	phi	epsilon	cx	J	каппа
1	0.0033	30	0.35	0.5	0.0059	0.2
2	0.0002	28	0.4	0.4	0.00087	0.4

Отметки донной поверхности, полученные в расчетах и экспериментальные результаты, взятые из работ [24, 36], приведены на рис. 4.2 - 4.3.

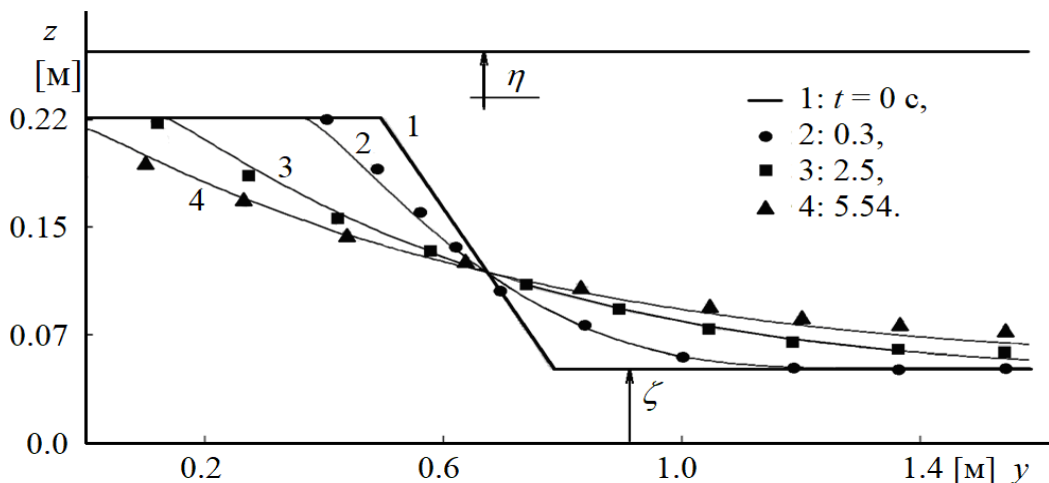


Рисунок 4.2 – Изменение геометрии канала во времени, сравнение с результатами работы [36].

В первой задаче рассматривалась деформация донной поверхности затопленного трапецевидного канала. Сравнение вычисленных и экспериментальных отметок донной поверхности приведены на рис. 4.2

Кривой 1 показана начальная геометрия трапециевидного канала [36], кривыми 2-4 эволюция профиля берегового откоса в моменты времени $t = 0.3$, $t = 2.5$, $t = 5.54$ секунд соответственно, при постоянном расходе 112 л/с и уровне свободной поверхности $\eta = 0.25$ м. Отметим, что экспериментаторам удалось с высокой степенью точности стабилизировать поток, потеря массы в сечении в данном эксперименте не превышает $\Delta_\Omega \sim 3.5\%$. При решении данной задачи величина G_x принималась постоянной.

Во второй задаче рассматривалась деформация донной поверхности трапециевидного канала при уровне свободной поверхности потока, равном бровке берегового склона [36]. Расчет второй задачи выполнялся с параметрами работы [24], в которой решалась задача, состоявшая в математическом моделировании тонкого движущегося слоя двухфазной смеси, ограниченного снизу неподвижной сыпучей средой, а сверху потоком жидкости. Положение верхней границы движущегося слоя предполагалось заданным, с определенными в ней касательными и нормальными напряжениями.

На рис. 4.3 кривой 1 показана начальная геометрия трапециевидного канала [24], кривой 2 – форма донной поверхности на момент времени $t = 600$ минут. В отличие от предыдущей задачи в данном примере, русловой процесс рассматривается на длительном периоде времени $t = 600$ минут, поэтому, не смотря на то, что критерий Δ_Ω в данном примере имеет значимую величину достигая 23%, величина $Q_\Omega = 6.4 \cdot 10^{-4}$ мала, а следовательно в эксперименте [24] экспериментаторам удалось сформировать установившийся русловой поток с более высокой степенью точности, чем в работе [36].

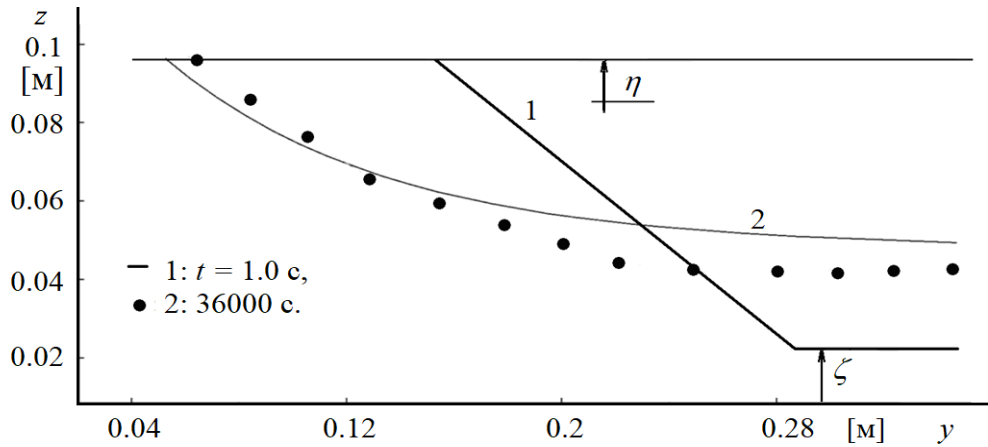


Рисунок 4.3 – Изменение геометрии канала во времени, сравнение с результатами работы [24]

4.2.2 Результаты моделирования для потоков с переменным расходом

Для валидации предложенной математической модели (4.1) - (4.10) был выполнен ряд расчетов, связанных с решением задачи о размыве берегового склона трапециевидного в начальный момент времени русла, геометрия которого схематично представлена на рис 4.1. Решение задачи выполнялось при параметрах, приведенных в работе [28]: $\varphi = 28^\circ$,

$$d = 0.8 \text{ мм}; \quad \varepsilon = 0.375; \quad c_x = 0.4; \quad f = 0.1; \quad T_0 = (\rho_s - \rho_w) g d \theta_0; \quad \theta_0 = 0.047.$$

Начальная геометрия трапециевидного канала для первой и второй группы расчетов приведены в таблице 4.4.

Таблица 4.4 – Начальная геометрия канала

y [м]	0	0.4	1.138	1.265	1.5
z [м]	0.3	0.212	0.212	0.14	0.14

В работе [39] предложена математическая модель и разработаны алгоритмы расчета береговых деформаций, в которых не учитывались изменения турбулентной вязкости в процессе изменения геометрии донной поверхности в створе реки.

В приведенных примерах для удобства демонстрации влияния параметров $\mu(t)$, $\eta(t)$ на процесс развития береговых деформаций высота

бровки берегового откоса взята на 8.8 см выше, чем использовалась в работе [27]. Точечным подмножеством синего цвета на рис. 4.4 показана начальная геометрия трапецевидного канала. Неразмываемая стенка трапецевидного канала находится справа $y = 1.5$ м. Точечным подмножеством зеленого цвета показана форма донной поверхности [27] на момент времени $t = 225$ минут, развившаяся из начальной геометрии дна (кривая 1). Развитие донной поверхности происходило под воздействием установившегося гидродинамического потока с расходом 11,9 л/с. Горизонтальной линией 1 на рис. 4.4 обозначена свободная поверхность потока в момент времени $t = 225$ мин.

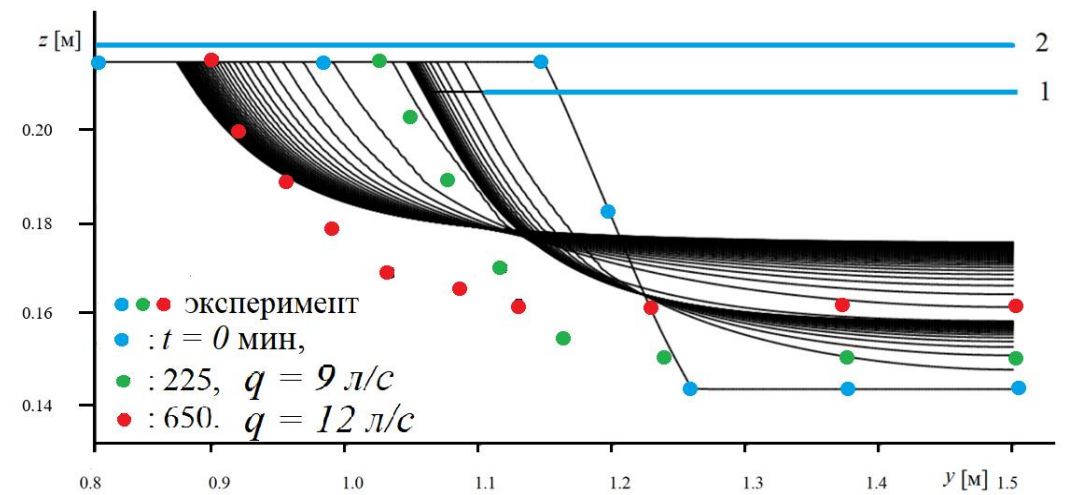


Рисунок 4.4 – Изменение геометрии канала во времени, расчет и эксперимент. Шаг визуализации донных отметок 12.5 мин (750 с)

Точечным подмножеством красного цвета показана форма донной поверхности [27] на момент времени $t = 650$ минут, развившаяся из геометрии дна, полученной в момент времени $t = 225$ минут (кривая 2). Развитие донной поверхности происходило под воздействием установившегося гидродинамического потока с расходом 16,3 л/с. Горизонтальной линией 2 обозначена свободная поверхность потока в момент времени $t = 650$ мин.

Анализ кривых 1-3 показывает, что, несмотря на попытку экспериментаторов в работе [27] получить установившийся процесс береговых деформаций,

баланс материала, сползающего с берегового откоса в основное русло канала, не соблюдается. Отношение объема песка, смытого с берегового откоса (кривая 2) при размыве канала, более чем в три раза превышает объем песка, перешедшего в ложе канала. Такой дисбаланс возможен только в случае протекания существенно не установившегося руслового процесса. На втором этапе (кривая 3) отношение смытого объема наносов к объему донных отложений приблизительно равно 1.5.

В работе [27] указывается, что глубина потока в начальный момент времени составляет 0.06 м, из рис. 4.4 следует, что в момент времени $t = 225$ минут глубина потока у стенки составляет ~ 0.066 м. В численных расчетах для описания изменений η во времени использовался линейный интеграл уравнения (4.38) $\eta = \eta_0 + (\eta_1 - \eta_0) \frac{t}{t_1}$, где $\eta_0 = 0.196(\text{м})$, $\eta_1 = 0.208(\text{м})$, $t_1 = 13500\text{с}$

взяты из работы [27]. На каждом шаге интегрирования выполнялся контроль определения турбулентной вязкости μ_t из условия (4.38). Результаты моделирования приведены на рис. 4.4 кривыми 1'-5', черными квадратными маркерами показаны вычисленные отметки донной поверхности. Отметим, что сравнение полученных расчетных отметок дна (кривые 1'-5') с экспериментальными отметками дна (кривые 1-2) по фронту берегового склона показывает их хорошее согласование, однако уровень средней отметки дна в расчетах существенно выше уровня полученных в экспериментах. Что объясняется отсутствием уноса массы неуставившимся потоком. При этом, по характеру получаемого донного профиля видно, что на береговом откосе доминирующим механизмом переноса донного материала при размыве берега является лавинный механизм движения наносов.

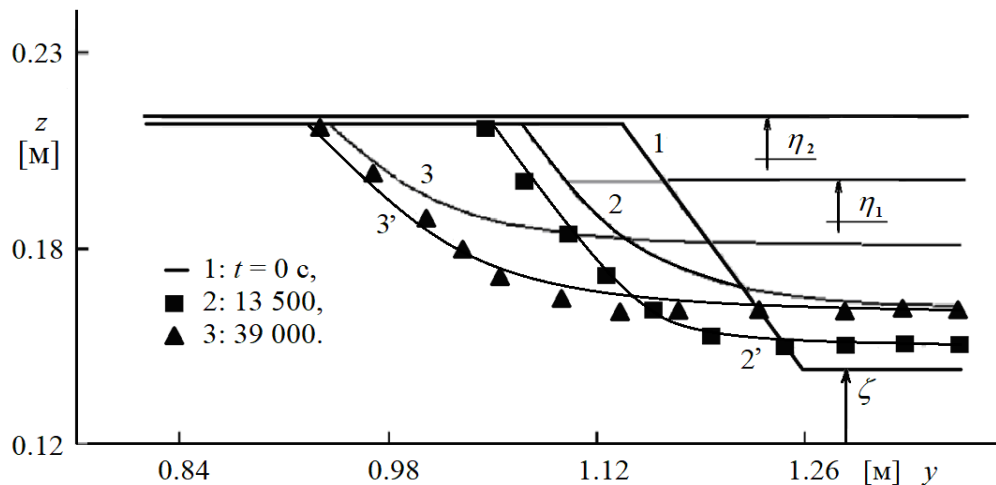


Рисунок 4.5 – Изменение геометрии канала во времени, сравнение с результатами работы [27]

Таблица 4.5 – геометрия канала

y	0	0.06	0.146	0.2875	0.39	0.4
z	0.1	0.1	0.1	0.022	0.022	0.025

Таблица 4.6 – Физико-механические и гранулометрические параметры задачи

d_{50}	φ	ε	c_x	J	κ_d
0.0013	30	0.4	0.4	0.0039	0.26

К сожалению, отсутствие промежуточных отметок донной поверхности не позволяет построить зависимость (4.70) для внесения поправок на градиент продольных наносов и при решении данной задачи величина G_x принималась постоянной.

Эволюция берегового откоса происходила при переменных расходе и уровне свободной поверхности [27]. Согласно работе [27], в которой изучалась реакция каналов с гравийным дном на изменения расхода, глубина потока в начальный момент времени составляет 0.06 м, в момент времени $t = 225$ минут глубина потока у стенки в течении минуты была изменена, достигнув значения 0.066 м.

Развитие донной поверхности в створе канала на первом этапе $t < 225$ мин. происходило под воздействием установившегося гидродинамического потока с расходом 11,9 л/с. На втором этапе расход потока достигал 16,3 л/с.

Горизонтальной штрихпунктирной линией на рис. 4.5 обозначена свободная поверхность потока в момент времени $t = 650$ мин.

Сравнение вычисленных и экспериментальных отметок донной поверхности приведено на рис. 4.5. Кривой 1 на рис. 4.5 показана начальная геометрия трапециевидного канала. Неразмываемая стенка трапециевидного канала находится справа $y = 1.5$ м. Кривой 2 показана форма донной поверхности [27] на момент времени $t = 225$ минут, развившаяся из начальной геометрии дна (кривая 1).

Из анализа кривых 2-3 рис. 4.5 видно, что сравнение полученных расчетных отметок дна (кривые 2-3) с экспериментальными отметками дна по фронту берегового склона показывает их хорошее согласование, однако уровень средней отметки дна в расчетах существенно выше уровня полученных в экспериментах. Следовательно, несмотря на попытку экспериментаторов в работе [27] получить установившийся процесс береговых деформаций, баланс материала, сползающего с берегового откоса в основное русло канала, не соблюдается как на первом, так и на втором этапе деформации створа канала. Критерий неравновесности руслового процесса на первом этапе достигает $\Delta_{\Omega} = 700\%$. Т.е. отношение объема песка, смытого с берегового откоса (кривая 2) при размыве канала более чем в 7 раз превышает объем песка, перешедшего в ложе канала.

Отметим, что введение в модельправки (4.7) при расчете донных деформаций в третьей задаче позволяет существенно улучшить прогноз по вычисленным донным деформациям (кривые 2'-3' на рис. 4.5).

4.3 Решение задачи о размыве правого берега переливной запруды на протоке Пемзенской

4.3.1 Описания физической формулировки задачи

В рамках сформулированной математической модели получено решение задачи об эволюции берегового склона протоки Пемзенской (р. Амур). Изучены береговые процессы, происходящие в створе переливной

запруды, после возникновения и развития в створе запруды прорана [106], связанного со смывом правого берега запруды в периоды половодий 2019-2022 гг.

Поскольку характерное время установления гидродинамических параметров потока много меньше характерного времени изменения его расхода [39], гидродинамический поток в створе запруды описывается в рамках квазистационарного приближения. Турбулентная вязкость потока описывается алгебраической моделью Лео К. ван Рейна (4.10). Для описания изменения донных и береговых отметок русла используется аналитическая модель движения наносов (4.4) - (4.7), предложенная в работах Петрова [17, 38, 106]. Для предотвращения заиливания прорана при боковом сходе донного материала с сухого берега в уравнение донных деформаций добавлен стоковый член (4.8)-(4.9), который регулирует развитие глубины прорана, асимптотически стремящейся к его режимной глубине.

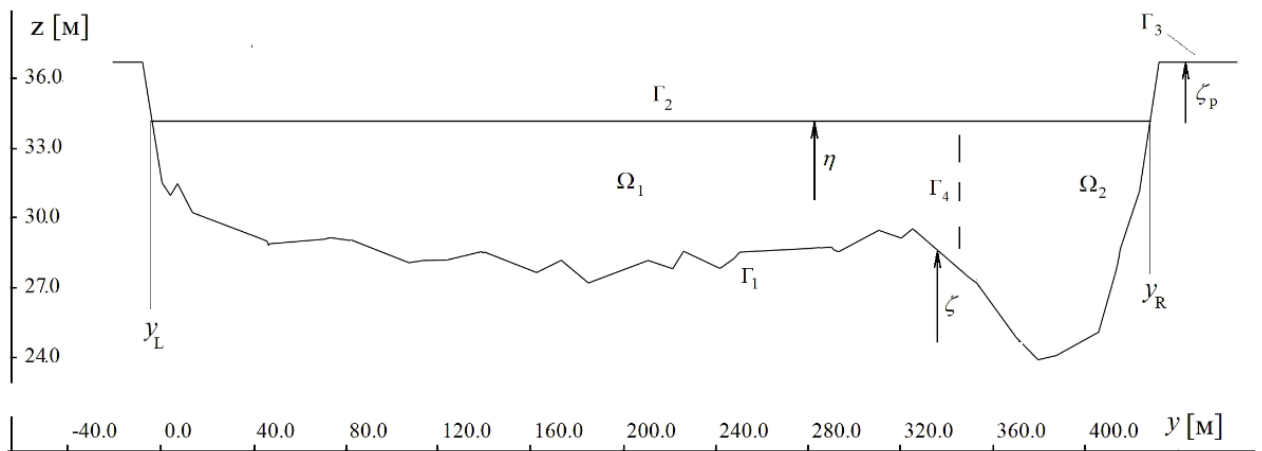


Рисунок 4.6 – Геометрия расчетной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ и ее границы

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_3 - граница сухого берега, Γ_4 - граница псевдо - симметрии

Для численного решения задачи предложенный алгоритм, основанный на методе конечных элементов, реализован в информационной системе «Амур» [105] с открытым исходным кодом.

4.3.2 Результаты расчетов

Для валидации предложенной математической модели (4.1) - (4.11) был проведен ряд вычислительных экспериментов по ретроспективному моделированию размыва прорана возникшего на переливной запруде протоки Пемзенской, реки Амур (область Хабаровского водного узла).

Расчеты осуществлялись при следующих общих параметрах: $\kappa_d = 0.25$; $\varepsilon = 0.375$; $c_x = 0.4$; $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$; $\rho_s = 2650 \text{ кг/м}^3$. Некоторые параметры донного материала в забронированной части створа, $k_s = 1.1$, $d_{50} = 1$, $\tan \varphi = 3$ (подобласть Ω_1 , $y < 350 \text{ м}$) отличались от параметров в размываемой части створа (подобласть Ω_2) $k_s = 0.1$, $d_{50} = 0.0005 \text{ м}$, $\tan \varphi = 0.5$. При расчете динамической скорости u_* использовались следующие параметры $\kappa = 0.41$ $h_i^v = 0.05H(y_i)$, $z_0 = 0.03k_s \text{ м}$. Тестовые расчеты проводились на сгущающейся последовательности расчетных сеток с различным размером конечных элементов. Для самой мелкой сетки, (рис. 4.8 (в)), выбранной в качестве расчетной, средний диаметр конечного элемента составлял около 0.2 м (51487 узла), при этом погрешность по расходу речного потока ($Q = \int_{\Omega_2} U d\Omega$ в начальный момент времени) по отношению к предыдущей сетке не превышала 0.0034%.

В тестовых расчетах на протяжении одного месяца использовались различные временные шаги Δt (120, 300 и 600 с), для которых были получены практически идентичные результаты. Поэтому для ускорения расчетов при ретроспективном моделировании использовался максимальный шаг $\Delta t = 600 \text{ с}$.

К сожалению, автор не располагал кривой отметок уровня свободной поверхности над запрудой протоки Пемзенской. Поэтому, для ретроспективного моделирования была выбрана отметка глубины потока на момент натурных наблюдений 09.08.2023 г и сделана привязка данной

глубины к уровню р. Амур по гидропосту г. Хабаровска. Уровни данного гидропоста для выбранного периода моделирования приведены на рис. 4.7.

Расчеты гидродинамического потока в рамках предложенной модели показали значительное занижение поля скоростей в области Ω_1 над телом переливной запруды и достаточно хорошее согласование расчетных скоростей со скоростями натурных наблюдений в области прорана Ω_2 . Пример таких расчетов представлен на рис. 4.8. Полученные результаты являются ожидаемыми, поскольку при постановке задачи в створе потока основным требованием является условие малости градиентов скоростей по направлению потока. Данное условие не выполняется в области Ω_1 (над телом запруды) и достаточно хорошо выполняется в области прорана Ω_2 при $y > 380\text{м}$. Поэтому, для расчетов русловых процессов при расчетах полей скорости и турбулентной вязкости в вертикальном створе А-А рис. 4.8 была определена «псевдо – граница русла» Γ_4 на отметке $y = 350\text{ м}$, на которой задавалось условие симметрии потока (2). Такой подход возможен в силу нескольких причин,

- дно левой части прорана не является размываемым участком тела запруды;
- скоростной режим потока в окрестности границы Γ_4 близок к гидростатическому;
- скоростной поток над телом запруды не является установившимся и его расчет по предлагаемой модели не будет корректным. Следовательно, введение псевдо-границы Γ_4 может считаться оправданным, поскольку различие измеренных (рис. 4.8., кривая 1) и расчетных (рис.4.8., кривая 2) скоростей на свободной поверхности потока в области Ω_2 над размываемым участком русла ($y > 380\text{м}$) не превышает 9 %.

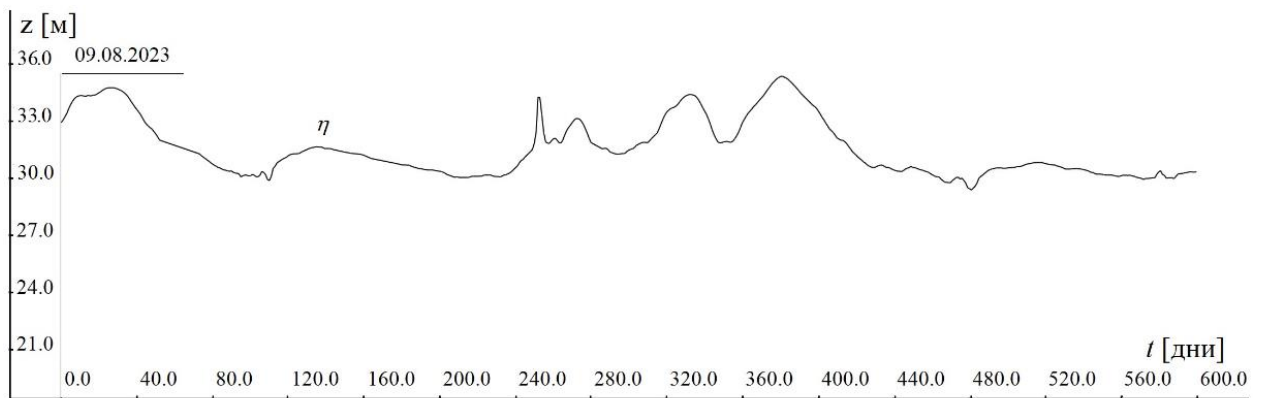


Рисунок 4.7 – Отметки уровня р. Амур в Балтийской системе высот по Хабаровскому гидропосту

На рис. 4.9 представлены профили донных отметок створа, полученные в результате полевых исследований в период с 13 августа 2019 года по 15 июня 2025 года, обозначенные кривыми 1–5. В период с 13 августа 2019 года по 9 августа 2023 года процесс углубления прорана в теле запруды характеризовался ярко выраженной нестационарностью и его глубина не достигла уровня верхнего и нижнего бьефов. В связи с этим применение предложенной в данной работе модели для анализа данного процесса было невозможно. Однако в 2023 году глубины верхнего и нижнего бьефов в районе прорана сравнялись, что позволило применить разработанную модель для расчета эрозии правого берега протоки.

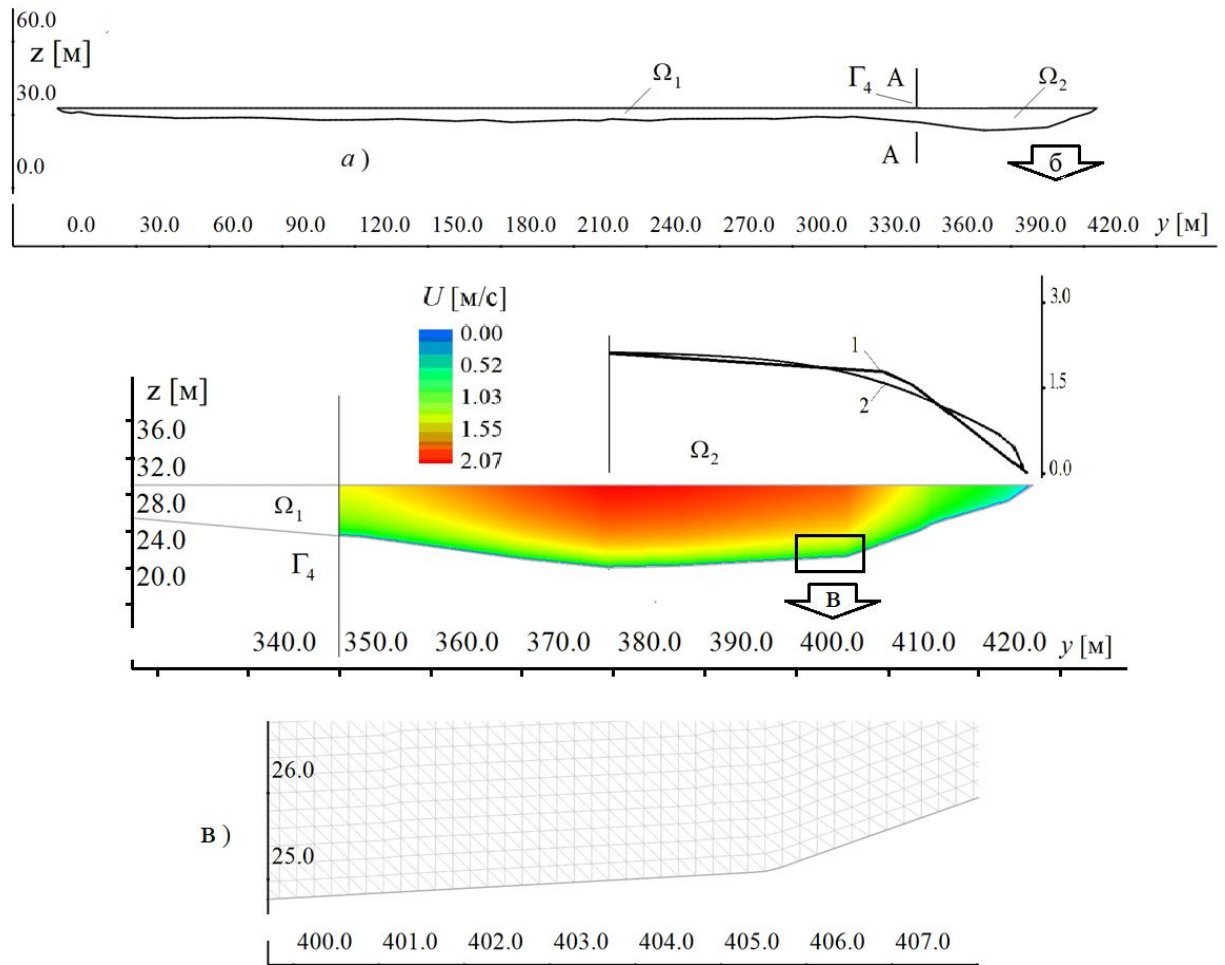


Рисунок 4.8 – а) распределение расчетных скоростей в области Ω_2 створа переливной запруды, б) измеренные (кривая 1) и расчетные (кривая 2) значения поверхностных скоростей в створе, в) фрагмент расчетной сетки

Сравнительный анализ данных полевых наблюдений (линии 3-5, рис. 4.9) с результатами расчетов (линии 3'-5', рис. 4.9) показывает их хорошее согласование, как по качественным, так и по количественным параметрам. При средней скорости эрозии береговой линии в 14.3 метра в год расхождения между расчетными и экспериментальными данными не превышают двух метров. Следовательно, различия между расчетными данными и фактическими измерениями не превышают 14%, что свидетельствует об адекватности предложенной русловой модели.

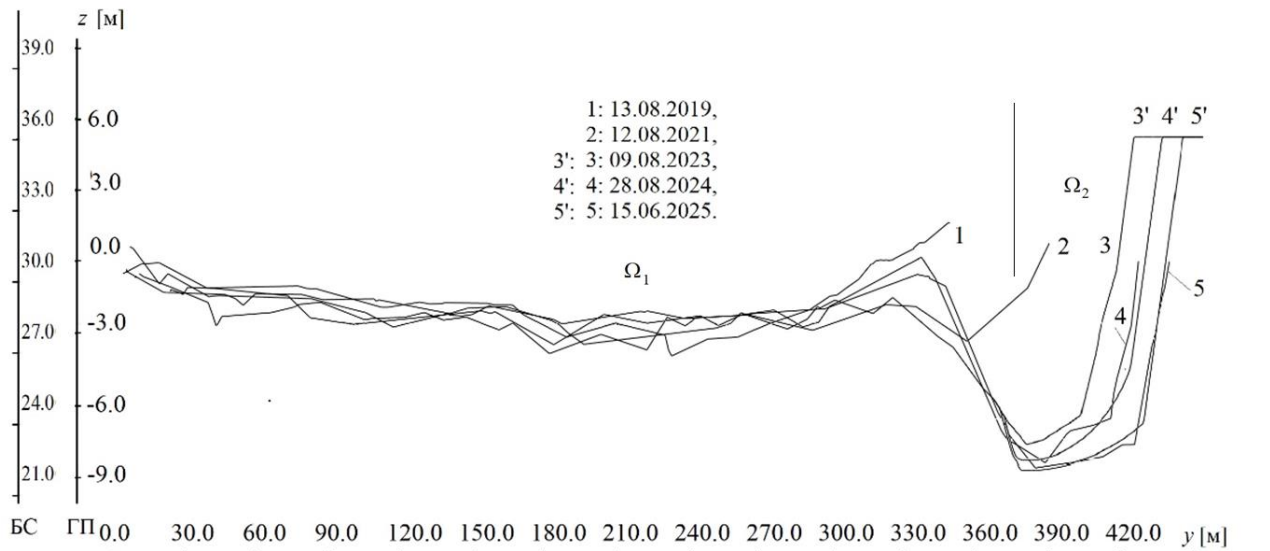


Рисунок 4.9 – Размыв правого берега запруды Пемзенской. Кривые 1-5 - натурные замеры донных отметок створа за период с 2019 по 2025 гг. Кривые 3'-5' – результаты численного моделирования за период с 2023 по 2025 гг.

4.4 Заключение по главе 4

Выполнено исследование береговых процессов в створах рек (каналов) с использованием предложенной математической модели. Показано, что для потоков с постоянным расходом модель позволяет получать численные результаты, которые хорошо согласуются с данными экспериментов. Особенно хорошее согласование получено для «быстрых» экспериментов с малыми характерными временами размыва. Когда влияние ошибок от нестационарности потока в продольном направлении мало.

Выявлено, что при решении задач береговой эрозии в створе канала на больших временных интервалах важен учет расходов наносов по оси канала. Из экспериментальных данных следовало, что во всех контрольных створах наблюдался унос или нанос донного материала на больших промежутках времени, что указывает на квазистационарный характер гидродинамических процессов.

В длительных экспериментах, когда существует дисбаланс массы в створе, вызванный наносом/уносом донного материала прогноз по

предложенной модели возможен, только с учетом введения дополнительного «режимного» объемного члена в уравнении Экснера. Выполненные расчеты для задач Питлика в канале с переменным расходом и ретроспективные расчеты для протоки Пемзенская показали эффективность такого подхода.

В процессе валидации модели на натурных данных протоки Пемзенской было показано, что предложенная математическая модель, использованный метод и алгоритм расчета позволили получить решение задачи в створе запруды, хорошо согласующееся с данными полевых наблюдений. Как в отношении фронтальной эрозии берегового склона, так и в отношении интенсивности врезания речного потока в ложе русла. Показано, что ошибка по эрозии берегового склона на всем протяжении моделирования не превышает 14%.

Заключение

Основные результаты и выводы по диссертационной работе заключаются в следующем:

1. Предложена двухмерная математическая модель, описывающая движение стационарного, турбулентного, спокойного речного потока в створе канала в декартовой и цилиндрической системе координат и эволюцию донно-береговой поверхности песчано-гравийного дна канала в створе реки, для режимов с постоянным и переменным расходом. Модель также сформулирована в переменных скорость-вихрь-функция тока - донная поверхность для прогнозирования изменения донной поверхности песчано-гравийного дна канала в краткосрочной и среднесрочной перспективе.

2. Представлено описание информационной системы «Амур» с открытым исходным кодом, разработанной для хранения, обработки и анализа большого объема полученных в ходе проведения экспедиций натурных данных. Система позволяет исследовать динамику русловых и береговых процессов. Описаны возможности инструментария информационной системы строить цифровые модели донного и берегового рельефов исследуемых участков реки, выполнять анализ русловых процессов за разные периоды времени из числа тех, в которые проводились натурные наблюдения. Предложенные и верифицированные в работе алгоритмы русловых задач, основанные на методе конечных элементов в формулировке Петрова – Галеркина, реализованы в информационной системе «Амур».

3. Для валидации гидродинамической модели решен ряд задач по расчету скоростей потока в лотковых створах Розовского, Блокланда, реки Десна и протоки Пемзенской (без учета поперечных скоростей). Выполненные численные исследования показали в целом хорошую согласованность полученных решений с известными экспериментальными данными. Численные исследования подтверждают возможность редукции

трехмерной модели движения речного потока к двумерной модели потока в плоскости створа канала.

4. Для валидации русловой модели решен ряд задач донно-береговых деформаций в трапециевидных створах (Икеда, Базаров, Питлик) и створе протоки Пемзенской. Выявлено, что при решении задач береговой эрозии в створе канала на больших временных интервалах важен учет расходов наносов по оси канала. Во всех контрольных створах наблюдался унос или нанос донного материала на больших промежутках времени, что указывает на квазистационарный характер гидродинамических процессов. В работе предложен механизм учета данного явления при исследовании береговых процессов через добавление стокового члена в уравнении Экснера, позволяющего регулировать процесс заиления/размыва створа.

Список литературы (References)

1. Гришанин К. В. Теория руслового процесса//М.:Транспорт, 1972. 216 с.
2. Figueres J. A., Galan A., Gonzalez J. An enhanced treatment of boundary conditions for 2D RANS streamwise velocity models in open channel flow // Water. 2021. Vol. 1001, no. 13. P. 1-22.
3. Kean J. W., Kuhnle R. A., Smith J.D., Alonso C.V., Langendoen E.J. Test of a method to calculate near-bank velocity and boundary shear stress // Journal of Hydraulic Engineering. 2009. Vol. 135, no. 7. P. 588-601.
4. Shu-Qingyang, Siow-Yong Lim Boundary shear stress distributions in trapezoidal chanel//Journal of Hydraulic Research, 2005,V. 43, N. 1 - pp. 98–102.
5. Javid S., Mohammadi M. Boundary Shear Stress in a Trapezoidal Channel// IJE Transactions A: Basics, 2012 V. 25, N. 4 – pp. 323-331.
6. Маккавеев, В.М. О движении руслового потока и об общих вопросах турбулентного движения жидкости / В.М. Маккавеев // Труды IV гидрологической конференции Балтийских стран, 1933. – С. 1-21.
7. Розовский, И. Л. Движение воды на повороте открытого русла / И. Л. Розовский, АН УССР . – Киев : АН УССР, 1957 . – 188 с.
8. Потапов М. В. Регулирование водных потоков методом искусственной поперечной циркуляции/ М. В. Потапов – М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1947. – 76 с.
9. Гришанин, К.В. Динамика русловых потоков. / К.В. Гришанин – Л. : Гидрометеиздат, 1979. – 311 с.
10. Gholami A., Bonakdari H., Zeynoddin M., Ebtehaj I., Gharabaghi B., Khodashenas S. R. Reliable method of determining stable threshold channel shape using experimental and gene expression programming techniques // Springer. Neural Computing and Applications. 2018. P. 1–19.

11. Huang S.L, Jia YF, Chan HC, Wang SSY Three dimensional numerical modeling of secondary flows in a wide curved channel//Journal of Hydrodynamics 2009, V. 21 N.6 – pp.758-766.

12. Stoesser T, Ruether N, Olsen N. R. B. Calculation of primary and secondary flow and boundary shear stresses in a meandering channel // Advances in Water Resources. – 2010. – V. 33. – P.158-170.

13. Struiksma N., Olesen K. W., Flokstra C., de Vriend H. J. Bed deformation in curved alluvial channels // Journal of Hydraulic Research. – 1985. – V. 23, No. 1. – P.57-79.

14. Караушев А. В. Речная гидравлика – Л.: Гидрометеиздат, 1969. 416 с.

15. Доманевский Н. А. и др. Русловые процессы и путевые работы на свободных реках / Доманевский Н. А., Лосиевский А. И., Маккавеев Н. И., Матлин Г. М., Ржаницын Н. А.—Труды ЦНИИЭВТ, 1956. вып. 8. 458 с.

16. Беликов В.В., Алексюк А.И. Модели мелкой воды в задачах речной гидродинамики. М., РАН, 2020 г., 346 стр. / [1]. Belikov V.V., Alekseyuk A.I. Shallow water models in problems of river hydrodynamics. M., RAS, 2020, 346 p. (in Russian).

17. Glover R. E., Florey Q. L. Stable channel profiles.// U. S. Bureau of Reclamation, Washington, 1951.

18. Макавеев Н.И. Русло реки и эрозия в ее бассейне. М.: Издательство АН СССР, 1955, 348 p. / Makaveev N.I. River bed and erosion in its basin. M.: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1955, 348 p. (in Russian).

19. Кондратьев Н.Е., Ляпин А.Н., Попов И.В., Пиньковский С.И., Федоров Н.Н. Якунин И.И. Русловой процесс. Л.: Гидрометеиздат. 1959. 372 с. / Kondratiev N.E., Lyapin A.N., Popov I.V., Pin'kovsky S.I., Fedorov N.N. Yakunin I.I. Channel process // L.: Gidrometeoizdat. 1959. 372 p. (in Russian).

20. Великанов, М.А. Движение наносов / М.А. Великанов – Изд. МР ФСССР, 1948. – 210 с.
21. Yang S. Q. Depth-averaged shear stress and velocity in open-channel flows // *Journal of Hydraulic Engineering*. 2010. Vol. 136, no. 11. P. 953-958.
22. Kamran A. Boundary shear stress distribution and flow structures in trapezoidal channels. // Thesis submitted to The University of Nottingham for the degree of Doctor of Philosophy. 2011. 198 p.
23. Ikeda S., Parker G., Saway K. Bend theory of river meanders. Part 1. Linear development // *J. Fluid Mech.* 1981. no. 112. P. 363–377.
24. Ikeda S., Parker G., Kimura Y. Stable width and depth of straight gravel rivers with heterogeneous bed materials // *J. Water resource research*. 1988. Vol. 24, no. 5. P. 713-722.
25. Hirano M. River-bed variation with bank erosion // *J. of Hydraulic, Coastal and Environmental Engineering*, 1973. N. 210, pp.13–20. (in Japanese)
26. Shoji F., Masashige Y. Shear stress distribution on a continuous boundary and widening process of a straight alluvial channel // *J. of Hydraulic, Coastal and Environmental Engineering*. 1984. no. 351. V.2 pp. 87–96. (in Japanese).
27. Pitlick J., Marr J., Pizzuto J. Width adjustment in experimental gravel-bed channels in response to overbank flows // *Journal of geophysical research: Earth surface*. 2013. Vol. 118. P. 553–570. doi:10.1002/jgrf.20059
28. Métivier F., Lajeunesse E., Devauchelle O. Laboratory rivers: Lacey's law, threshold theory and channel stability // *Earth Surf. Dynam. Discuss.* 2016. P. 1-16.
29. Parker G. Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 1. The sand-silt river//*J. Fluid Mech.* 1978. part 1, V. 89. pp. 109–126.

30. Knight D. W., Yuen K. W. H., Al-Hamid A. A. I. Boundary shear stress distributions in open channel flow // *Mixing and transport in the environment*. 1994. P. 51-87.
31. Miguntanna N. S., Moses H., Sivakumar M., Yang S. Q., Enever K. J. Re-examining log law velocity profile in smooth open channel flows // *Environ Fluid Mech*. 2020. Vol. 20. P. 953–986.
32. Дебольский В.К., Зайдлер Р., Массель С. и др. Динамика русловых потоков и литодинамика прибрежной зоны моря// М.: Наука, 1994. – 303 с.
33. Naot D., Nezu I., Nakagawa H. Hydrodynamic behavior of compound rectangular open channels // *Journal of Hydraulic Engineering*. 1993. Vol. 119, no. 3. P. 390-408.
34. Diplas P., Vigilar G. Hydraulic geometry of threshold channels/ P. Diplas, G. Vigilar // *J. Hydr. Eng., ASCE*, 1992. V. 118, HY4. — pp. 597—614.
35. Farias H.D. Physical and Mathematical Modelling of Alluvial Channels in Regime // *Hydra*. 2000.
36. Петров П. Г. Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // *ПМТФ*, 1991. № 5. С. 72 — 75. / Petrov P.G. Movement of a granular medium in the bottom layer of liquid // *PMTF*, 1991. No. 5. P. 72 — 75. (in Russian).
37. Петров, А.Г. Вектор расходов наносов в турбулентном потоке над размываемым дном / А.Г. Петров, П.Г. Петров // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2000. – Т. 41, № 2. – С. 102-112.
38. Петров А.Г., Потапов И.И. Избранные разделы русловой динамики // М.: Ленанд. 2019. 244 с. КОД (ISBN): 978-5-9710-6022-2 / Petrov A.G., Potapov I.I. Selected sections of channel dynamics // М.: Lenand. 2019. 244 p. (in Russian).
39. Бондаренко Б.В., Потапов И.И. Математическое моделирование эволюции берегового склона в каналах с песчаным руслом //

Вычислительные технологии. 2013. Т.18, № 4. С. 25–36. / Bondarenko B.V., Potapov I.I. Mathematical modeling of the evolution of the coastal slope in channels with a sandy bed // Computational technologies. 2013. T.18, no. 4. pp. 25–36 (in Russian).

40. Бондаренко Б.В., Потапов И.И. Моделирование эволюции поперечного сечения песчаного канала // Вычислительные технологии evolution of the cross section of the sand channel. 2009. Т.14, № 5. С. 1–14. / Bondarenko B.V., Potapov I.I. Modeling the evolution of the cross section of the sand channel // Computational technologies evolution of the cross section of the sand channel. 2009. T.14, no. 5. pp. 1–14. (in Russian).

41. Потапов И. И., Потапов Д. И. Моделирование русловых процессов в створе канала. Труды ИСП РАН, том 35, вып. 4, 2023 г., стр. 187–196.

42. Потапов Д. И., Потапов И.И. Развитие берегового откоса в русле трапецевидного канала // Компьютерные исследования и моделирование. 2022, Т. 14, № 3, С. 581–592. / Potapov D.I., Potapov I.I. Development of a coastal slope in the bed of a trapezoidal canal // Computer research and modeling. 2022, T. 14, No. 3, pp. 581–592 (in Russian).

43. Анализ русловых деформаций р. Амур на участке Хабаровского водного узла УДК 532.545 © 2020 г. Д.И. Потапов, И.И. Потапов, д-р физ.-мат. наук (ВЦ ДВО РАН, Хабаровск) Информатика и системы управления, 2020, №2(64) Моделирование систем

44. Анализ русловых процессов участка р. Амур в окрестности Хабаровска за 2005-2007 ГГ. УДК 532.545 © 2018 г. И.И. Потапов, д-р физ.-мат. наук, Д.И. Потапов (ВЦ ДВО РАН, Хабаровск), Информатика и системы управления, 2018, №4(58) Заметки

45. Потапов Д. И., Потапов И. И. Модель размыва правого берега переливной запруды на протоке Пемзенской. Труды ИСП РАН, том 37, вып. 6, 2025 г., стр. 203 - 216.

46. И. И. Потапов, Д. И. Потапов, К. С. Королёва. О движении речного потока в сечении изогнутого русла // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 4. С. 1–18.

47. Потапов И.И., Потапов Д.И. Модель установившегося течения реки в поперечном сечении изогнутого русла//Компьютерные исследования и моделирование. 2024, Т. 16, № 5, С. 1163–1178.

48. Потапов Д. И. Математическая модель для береговых деформаций реки Амур // VI Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления» Хабаровск, Россия, 14-16 сентября, 2021 г.

49. Потапов Д. И. Анализ применимости аналитической русловой модели для моделирования развития берегового откоса трапециевидного канала // VII Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления» Хабаровск, Россия, 11-13 сентября, 2023 г.

50. Потапов Д. И. Модель установившегося течения реки в поперечном сечении изогнутого русла // VIII Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления» Хабаровск, Россия, 15-17 сентября, 2025 г.

51. Потапов Д. И., Потапов И.И Развитие берегового откоса в русле трапециевидного канала. Всероссийская конференция «Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач математической физики», посвященная памяти К. И. Бабенко 24–26 августа 2022 г. Москва.

52. Потапов Д. И., Потапов И. И. О развитии песчаного пойменного берега реки // Всероссийская конференция молодых учёных-механиков 4 -14 сентября 2022 года, г. Сочи.

53. Потапов И. И. Потапов Д. И. Анализ применимости аналитической русловой модели для моделирования развития берегового откоса трапециевидного канала. XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике 21-25 августа 2023 года, Санкт-Петербург.

54. Потапов И.И., Потапов Д.И. Движение речного потока в створе изогнутого русла//Неравновесные процессы в сплошных средах: материалы

междунар. симп.: Перм. гос. нац. исслед. ун-т. - Пермь, 2024. Тезисы. с. 393 – 396.

55. Ikeda S. Stable channel cross-sections of straight sand rivers // J. Water Resources Res., 1991. Vol. 27, no. 9. P. 2429–2438.

56. Королёва К.С., Потапов Д.И., Потапов И.И., Модель движения установившегося потока в поперечном створе изогнутого естественного русла // Труды ИСП РАН, том 38, вып. 2, 2026, С. 207 -225.

57. Известия ВНИИГ им. Веденеева Гидравлика и гидравлические сооружения № 240(с)2002

58. Известия ВНИИГ им. Веденеева Гидравлика и гидравлические сооружения № 245(с)2006

59. Parker, G. Bedload and size distribution in paved gravel-bed streams / G. Parker, P.C. Klingeman, D.G. McLean // Journal of the Hydraulics Division. – 1982. – V. 108, № 4. – pp. 544-571.

60. Потапов И.И., Потапов Д.И. Анализ применимости аналитической русловой модели для моделирования развития берегового откоса трапецевидного канала – Хабаровск: ХФИЦ ВЦ ДВО РАН, 2022. – 19 с.

61. Колмогоров, А.И. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости / А.И. Колмогоров // Известия АН СССР. Серия физическая. – 1942. – Т. 6. – С. 56-68.

62. Гуляев, А.Н. Козлов В.Е., Секундов А.Н. К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости// Известия Российской академии наук. МЖГ – 1993. – № 4. – С. 69-81.

63. Spalart, P.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows / P.R. Spalart, S.R. Allmaras // La Recherche Aerospatial. – 1994. – № 1.– pp. 5-21.

64. Колмогоров, А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса А.Н. Колмогоров – Докл. АН СССР, 1941. – Т. 30, №4. – С. 299-303.
65. V. W. Nee and L. S. Kovaszny, "Simple phenomenological theory of turbulent shear flows," Phys. Fluids, 12, No. 3 (1969)
66. Wray, T. J., Agarwal, R. K., "Low-Reynolds-Number One-Equation Turbulence Model Based on a k-omega Closure," AIAA Journal, Vol. 53, No. 8, 2015, pp. 2216-2227.
67. Prandtl, L. On fully developed turbulence / L. Prandtl // Proceedings of 2nd International Congress of Applied Mechanics, Germany, 1926. – pp. 62-74.
68. Prandtl, L. Uber die ausgebildete turbulenz / L. Prandtl — ZAMM. – 1928. – №5. – pp. 136-139.
69. Prandtl, L. Ueber ein neues Formel-system fur die ausgebildete Turbulence / L. Prandtl, K. Wieghardt // Nachr. Akad. Wiss., Gottingen, Math-Phys. Klasse. – 1945. – pp. 6 - 19.
70. Караушев, А.В. Взмучивание и распространение зон мутности в водохранилищах / А.В. Караушев // Труды ГГИ. – 1984. – Вып. 111. – С. 81-95.
71. de Karman, T. On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence / T. de Karman, H. Leslie // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. – 1938. – V. 164. № 917. – pp. 192-215.
72. von Karman, T. Progress in the Statistical Theory of Turbulence / T. von Karman // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1948. V. 34, No.11. pp. 530–539.
73. Absi R. Analytical solutions for the modeled k-equation // ASME J. Appl. Mech. 2008. V. 75. P. 044501.

74. Absi R. A simple eddy viscosity formulation for turbulent boundary layers near smooth walls // C. R. Mecanique. 2009. V. 337. P. 158–165.

75. Absi R., Di Nucci C. On the accuracy of analytical methods for turbulent flows near smooth walls // C. R. Mecanique. 2012. V. 340. P. 641–645.

76. Absi R. Eddy Viscosity and Velocity Profiles in Fully-Developed Turbulent Channel Flows // Fluid Dynamics. 2019. V. 54. P.137–147.

77. Schmidt, W. Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen / W. Schmidt. Verlag von H. Grand, Hamburg, 1925.

78. Великанов, М.А. Динамика русловых потоков / Великанов М.А. – Л. : Гидрометеиздат, 1949. – 475 с.

79. Coles D. The law of the wake in turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. P. 191–226.

80. van Driest E.R. On turbulent flow near a wall // J. Aero. Sci. 1956. V. 23. P. 1007–1011.

81. Rodi, W. Numerical calculation of flow and sediment transport in rivers / W. Rodi // Proceedings of the Eighth International Symposium on Stochastic Hydraulics. Beijing, China, 2000. – pp. 15–30.

82. Маккавеев, В.М. Гидравлика В.М. Маккавеев, И.М.Коновалов – Л. : Речиздат, 1940. – 643 с.

83. Маккавеев, В.М. Об исследовании русловых потоков на воздушных моделях и структуре открытых водных потоков / В.М. Маккавеев // Новые методы и аппаратура для исследований русловых процессов. М., 1959. – С. 137–145.

84. Маккавеев, В.М. Перемещение твердых частиц в турбулентных потоках жидкости Маккавеев В.М. Труды коорд. совещания по гидротехнике. Изд.ВНИИГ, 1967. – Вып. 36. – 262 с.

85. Великанов, М.А. О двух теориях переноса взвешенных наносов -Сб.: «Проблемы русловых процессов» (основные материалы Всесоюз. 262 совещания по проблеме русл. процессов). / М.А. Великанов // Л.: Гидрометеиздат, 1953. – С. 43—51.

86. van Rijn, L.C. Sediment Transport, Part I: Bed Load Transport / L.C. van Rijn // Journal of Hydraulic Engineering. – 1984. – V. 110, № 10. – pp. 1431-1456.

87. van Rijn, L.C. Sedimentation of dredged channels by currents and waves / L.C. van Rijn // Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. – 1986. – V. 112, № 5. – pp. 541-559.

88. van Rijn, L.C. Unified View of Sediment Transport by Currents and Waves. II: Suspended Transport / L.C. van Rijn // Journal of Hydraulic Engineering. – 2007. – V. 133, № 6. – pp. 668-689.

89. van Rijn, L.C. Unified View of Sediment Transport by Currents and Waves. I: Initiation of Motion, Bed Roughness, and Bed-Load Transport / L.C. van Rijn // Journal of Hydraulic Engineering. – 2007. – V. 133, № 6. – pp. 668-689.

90. van Rijn, L.C. Mathematical modeling of morphological processes in the case of suspended sediment transport / L.C. van Rijn // Ph.D. thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands, 1987. – 134 p.

91. Parker, G. Self-accelerating turbidity currents / G. Parker, Y. Fukushima, H.M. Pantin // Journal of Fluid Mechanics. – 1986. – V. 171. – pp. 145-181.

92. Parker, G. Surface-based bedload transport relation for gravel rivers / G. Parker // Journal of Hydraulic Research. – 1990. – V. 28, № 4. – pp. 417-436.

93. Потапов И.И. Особенности реализации математической модели плановых русловых деформаций. VI Международная научно-практическая конференция “Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления”. Хабаровск, Россия, 14-16 сентября 2021 г.

94. Exner, F.M. Über die Wechselwirkung zwischen Wasser und Geschiebe in Flüssen Sitzungsber. / F.M. Exner // Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss. Kl. Abt. 2A. – 1925. – V. 134. – P. 165-180.

95. Петров, А.Г. Перенос взвешенных частиц турбулентным потоком над размываемым дном / А.Г. Петров, П.Г. Петров // Прикладная механика и техническая физика. – 1992. – №4. – С. 61-69.

96. Отчет о научно-исследовательской работе. Государственный мониторинг р. Амур в районе строительства объектов инженерной защиты левого берега в Хабаровске. – СПб.: ЗАО "Ленгипроречтранс", 2005

97. Отчет о научно-исследовательской работе. Государственный мониторинг р. Амур в районе строительства объектов инженерной защиты в Хабаровске. – СПб.: ЗАО "Ленгипроречтранс", 2006

98. Отчет о научно-исследовательской работе. Государственный мониторинг р. Амур в районе строительства объектов инженерной защиты в Хабаровске. – СПб.: ЗАО "Ленгипроречтранс", 2007

99. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир. 1980. 616 с.

100. Шабров Н. Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. - Л.: Машиностроение, 1983. - 212 с.

101. Булгаков В.К., Потапов И. И. Сравнительный анализ противопоточных конечно-элементных схем высокого порядка для задачи Навье-Стокса на основе модифицированного SUPG-метода//Дальневосточный математический журнал, 2003, Том 4, № 1, с. 5 -17.

102. Blokland T. Turbulentie-metingen in een gekromde goot: Master thesis / Delft Technical University, 1985. <https://resolver.tudelft.nl/uuid:f15714b4-6651-49ea-b08c-13d9b06c61db>

103. van Balen W., Uijttewaal W. S. J., Blanckaert K. Large-eddy simulation of a curved open-channel flow over topography, *Physics of Fluids*, 2010, vol. 22, no. 7, 075108. <https://doi.org/10.1063/1.3459152>

104. Booij R. Measurements and large eddy simulations of the flows in some curved flumes // *Journal of Turbulence*. – 2003. – V. 4. – P. 1–17.

105. Потапов И.И. Информационная система «Амур». – 2025. – URL: <https://github.com/PotapovII/Amur> (дата обращения: 22.05.2025)

106. Van Rijn L. C. Sediment transport, Part II: Suspended load transport // *Journal of Hydraulic Engineering*. — 1984. — Vol. 110, No. 11. — P. 1613–1641.