

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Хабаровский Федеральный исследовательский центр
Дальневосточного отделения Российской академии наук
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Амурский государственный университет

На правах рукописи



Жильцов Александр Владимирович

**Оптимизационные алгоритмы с модифицированными
функционалами Лагранжа для решения контактных задач
механики**

Специальность 1.2.2 — «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
Максимова Надежда Николаевна

Хабаровск — 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Метод множителей Лагранжа в задаче конечномерного выпуклого программирования	12
1.1 Функция чувствительности	12
1.2 Метод решения двойственной задачи	16
1.3 Применение метода для численного решения конечномерной задачи Синьорини	20
1.3.1 Постановка задачи Синьорини	21
1.3.2 Аппроксимация и алгоритм решения	22
1.3.3 Результаты вычислительных экспериментов	25
Глава 2. Модельная задача теории упругости с трещиной	27
2.1 Постановка задачи	27
2.2 Метод решения модельной задачи	29
2.2.1 Определение модифицированного функционала Лагранжа	29
2.2.2 Функционал чувствительности	32
2.2.3 Свойства модифицированного функционала	36
2.3 Численное решение модельной задачи с трещиной	43
2.3.1 Аппроксимация и алгоритм поиска седловой точки	44
2.3.2 Результаты вычислительных экспериментов	46
Глава 3. Устойчивый метод решения полукоэрцитивной контактной задачи для двух упругих тел	49
3.1 Постановка задачи	49
3.2 Модифицированная схема двойственности	53
3.2.1 Определение модифицированного функционала Лагранжа	53
3.2.2 Функционал чувствительности	57
3.3 Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа	64
3.4 Задача с учетом трения	71
3.5 Численное решение задачи контакта двух тел	73
3.5.1 Аппроксимация и алгоритм поиска седловой точки	74

	Стр.	
3.5.2	Результаты вычислительных экспериментов	75
3.5.3	Результаты вычислительных экспериментов для задачи с учетом трения	77
3.5.4	Результаты вычислительных экспериментов с обобщенным методом Ньютона для решения коэрцитивной задачи	79
Глава 4.	Задача о теле, содержащем тонкий дефект с параметром	83
4.1	Постановка задачи	83
4.2	Разрешимость и единственность задачи	85
4.3	Метод решения	86
4.3.1	Классический функционал Лагранжа	86
4.3.2	Модифицированный функционал Лагранжа	89
4.4	Аппроксимация задачи и сходимость метода конечных элементов .	89
4.5	Алгоритм Удзавы и обобщенный метод Ньютона	92
4.6	Результаты вычислительных экспериментов	95
Заключение	100
Список литературы	102
Публикации автора по теме диссертации	111
Приложение А. Листинги программных кодов	114
A.1	Задача Синьорини	114
A.2	Модельная задача с трещиной	119
A.3	Задача контакта двух тел с учетом трения	126
A.4	Задача о теле с дефектом	136

Введение

Многие задачи механики сплошных сред формулируются в виде краевых задач для уравнений с частными производными при дополнительных условиях, наложенных на искомое решение. Часть таких задач можно описать с помощью вариационных неравенств, естественным образом приводящих к поиску экстремума функционала энергии на некотором множестве, сформированном ограничениями.

Теория вариационных неравенств и численных методов их решения возникла в 60-х годах XX века. Простейшей модельной задачей, приводящей к вариационным неравенствам, является задача о кратчайшем пути, соединяющем две заданные точки на плоскости и обходящем некоторые препятствия. Первой такой задачей, стала задача Синьорини, поставленная автором в 1933 году. В 1959 году к исследованию задачи приступил Г. Фикера и в 1963 году опубликовал её полный разбор [1]. Чуть позже Г. Стампаккья доказал своё обобщение теоремы Лакса — Мильграма [2], необходимой для изучения регулярности уравнений с частными производными, и придумал название «вариационное неравенство» для задач подобного рода. Работа Фикеры становится широко известной во Франции, а исследования продолжают Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс и их ученики. В 1972 году выходит книга Дюво и Лионса [3], в которой множество задач из различных разделов физики формулируется на языке вариационных неравенств. Какие-то предложения в ней даны с подробным обоснованием, для каких-то есть лишь наброски доказательств, а некоторые подкреплены ссылками на статьи. В 1976 году выходят книги И. Эккланда, Р. Темама [4] и Р. Гловинского, Ж.-Л. Лионса, Р. Тремольера [5]. В первой из них вариационные неравенства исследуются с общих позиций, имеется обзор приложений выпуклого анализа в механике, экономике и численном анализе. Во второй дается систематическое изложение численных методов исследования вариационных неравенств. Также уделено внимание теории двойственности, методам релаксации и штрафов. В 1980 году Д. Киндерлерер и Г. Стампаккья издают книгу [6], в которой сосредотачиваются на теории вариационных неравенств, находящей применение в физике, технике, экономике и других областях знаний.

В 1983 году была опубликована книга И. Главачека и др. [7], в которой сделан акцент на механике деформируемого твердого тела, приводятся числен-

ные алгоритмы. В этой книге рассматривается задача, которую мы исследуем в третьей главе диссертации. Вариационные принципы применяются к задачам механики в книгах С. Г. Михлина [8], В. Л. Бердичевского [9], Ф. Сьярле [10], А. С. Кравчука [11]. Развивается это направление в работах Р. В. Намма и его учеников Э. М. Вихтенко, Н. Н. Максимовой (Кушнирук), Г. И. Цоя [12—22], в статьях А. М. Хлуднева и его учеников Е. М. Рудого, Н. П. Лазарева, Т. С. Поповой, В. В. Щербакова, Е. В. Вторушина [23—34], В. А. Ковтуненко [35; 36], Л. С. Клабуковой [37] и многих других. Мы выделили лишь работы, более близкие к исследуемым нами задачам. Анализ моделей теории упругости, получивших признание в последние годы, можно найти в книге А. М. Хлуднева [38], вышедшей в 2010 году. Одна из моделей, описанных в этой книге, рассматривается во второй главе нашей работы.

В настоящее время в промышленности широко используются композитные материалы, которые представляют собой комбинацию из двух и более компонентов с существенно различными свойствами. Использование таких материалов позволяет получить большую прочность и жесткость. Но в процессе эксплуатации композитных материалов наполнитель, выполняющий функцию армирования, может отслаиваться от упругой матрицы, что приводит к появлению трещин и других дефектов, ухудшающих целевые характеристики. Для определения предельных нагрузок, предсказания срока службы и поведения композитных материалов необходимо разрабатывать и изучать их модели. В данной работе рассматриваются наиболее простые из нелинейных моделей, описывающих напряженно-деформированное состояние твердых тел. Построение эффективных численных алгоритмов их решения — базис для исследования более сложных реальных задач.

Математические постановки соответствующих прикладных задач существенно зависят от характера моделирования тонкого включения и вида краевых условий на берегах трещин. Классический подход к описанию задач теории трещин приводит к тому, что на берегах трещины задаются краевые условия типа равенств [39]. Современные модели в отличие от классических содержат нелинейные краевые условия. Благодаря таким условиям не допускается взаимное проникновение берегов трещины или двух тел друг в друга [38]. Краевые условия при этом имеют вид системы равенств и неравенств, а задачи относятся к классу задач со свободной границей.

Метод Лагранжа позволяет снять ограничения задачи. Функция Лагранжа зависит от двух групп переменных — прямых (переменные задачи) и двойственных (переменных, отвечающих ограничениям задачи). Однако стандартной схеме присущ ряд недостатков. Во-первых, целевая функция двойственной задачи оказывается в общем случае разрывной, вне зависимости от гладкости функции в исходной задаче. Во-вторых, тоже в общем случае, безусловная оптимизация по прямым переменным при оптимальных значениях двойственных не гарантирует получения оптимального решения исходной задачи.

Теория модифицированных функций Лагранжа позволяет преодолеть недостатки классического подхода. Пристальное внимание эта теория привлекла после выхода работ [40; 41], где разработан соответствующий итеративный метод, и статьи [42], содержащей модификацию функции Лагранжа для задачи с ограничениями типа неравенств. После этого методы решения задач нелинейного программирования, связанные с модифицированными функциями Лагранжа, получили широкое распространение и были всесторонне исследованы, в результате подтверждена их высокая эффективность. Основными монографиями, освещающими данную тему, являются труды Е. Г. Гольштейна и Н. В. Третьякова [43], К. Гроссмана и А. А. Каплана [44], Д. Бертсекаса [45; 46], Б. Т. Поляка [47]. В них теория модифицированных функций Лагранжа излагается для конечномерных задач выпуклого программирования.

В настоящее время популярным становится применение схем двойственности для решения вариационных неравенств. Функционал Лагранжа в этом случае строится для задачи условной минимизации функционала потенциальной энергии. Такой подход можно наблюдать в работах [12—22; 48—54].

Численное исследование рассматриваемых в работе задач проводится с использованием метода конечных элементов. Изначально он был создан для решения краевых задач в теории упругости и оказался гораздо эффективнее метода конечных разностей. Этот метод позволяет учитывать геометрические особенности областей (при этом ЭВМ используется не только для решения системы уравнений, но в первую очередь для формулировки и построения дискретных аппроксимаций). С математической точки зрения метод конечных элементов является обобщением метода Рэлея — Ритца — Галёркина. Систематическое изложение теории метода конечных элементов можно найти в [55—57]. Вопросы применения метода конечных элементов для исследования вариационных неравенств изложено в монографии Ф. Сьярле [10].

При аппроксимации рассматриваемых нами задач получается квадратичная функция, для минимизации которой (по прямым переменным) можно применять хорошо известные численные методы типа градиентного спуска, поточечной релаксации, метода Ньютона [58; 59]. Однако матрица вторых производных этой функции может оказаться вырожденной, а в таком случае при минимизации возникают проблемы со сходимостью численных алгоритмов. Для преодоления этой сложности мы используем вспомогательный приём — итеративную проксимальную регуляризацию минимизируемой функции. Вообще, регуляризация может быть использована и в случаях, когда неточно заданы целевая функция либо допустимое множество. С различными методами решения неустойчивых задач можно ознакомиться в книге Ф. П. Васильева [58].

Целью работы является обоснование применимости теории модифицированных функционалов Лагранжа и построение на их основе оптимизационных алгоритмов для решения задач теории упругости со свободной границей (модельная задача с трещиной, полукоэрцитивная задача контакта двух тел, задача о теле с дефектом с параметром разрушения).

Для достижения поставленной цели необходимо было решить **задачи**:

1. Обосновать справедливость применения теории модифицированных функционалов Лагранжа к задачам выпуклого программирования в случае, когда целевая функция является выпуклой, но не сильно выпуклой.
2. Построить и обосновать схему двойственности, основанную на модифицированном функционале Лагранжа, для решения модельной задачи теории упругости с трещиной. Исследовать свойства функционала чувствительности и свойства модифицированного функционала Лагранжа для поставленной задачи.
3. Построить и обосновать устойчивый метод, основанный на схеме двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа и итеративной проксимальной регуляризацией, для решения полукоэрцитивной контактной задачи для двух упругих тел. Применить метод последовательных приближений для решения задачи с учетом трения в зоне контакта.
4. Построить и обосновать схему двойственности, основанную на модифицированном функционале Лагранжа, для решения задачи о теле, содержащем тонкий дефект с параметром.

5. Выполнить численную реализацию исследуемых алгоритмов при конечно-элементной аппроксимации задач.
6. Разработать комплекс вычислительных программ для выполнения численных расчетов. Провести численные эксперименты. Дать сравнительный анализ различных методов решения.

Научная новизна:

1. Показано, что функция чувствительности является слабо полунепрерывной снизу. Обосновано применение модифицированных функций Лагранжа к полукоэрцитивным задачам механики.
2. Для модельной задачи с трещиной исследована схема двойственности с классическим и модифицированным функционалами Лагранжа; показано, что множества седловых точек этих функционалов совпадают; обосновано применение алгоритма Удзавы для поиска седловой точки; построена аппроксимация с помощью метода конечных элементов; проведены численные расчеты и изучены их результаты.
3. Для задачи контакта двух тел исследована схема двойственности с классическим и модифицированным функционалами Лагранжа; показано, что множества седловых точек этих функционалов совпадают; обосновано применение алгоритма Удзавы для поиска седловой точки; обосновано применение итеративной проксимальной регуляризации; построена аппроксимация с помощью метода конечных элементов; проведены численные расчеты и проанализированы их результаты.
4. Для задачи контакта двух тел с учетом трения построена схема двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа; реализован алгоритм последовательных приближений; проведены численные расчеты и сравнение их результатов с результатами решения задачи, не учитывающей трение.
5. Для задачи о теле, содержащем дефект с параметром разрушения, построена схема двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа; сформулирована и доказана теорема о седловой точке; реализован обобщенный метод Ньютона с выбором величины шага по правилу Армихо; проведены численные расчеты с разными значениями параметров.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в обосновании применимости методов двойственности с модифицированными функционалами Лагранжа к исследованию контактных задач механики. Данные исследования имеют фундаментальный характер. Однако сформированные алгоритмы и их реализации на языке программирования C# или C++ для каждой задачи можно использовать при исследовании более сложных моделей и при решении прикладных задач.

Результаты проведенного научного исследования будут полезны при реализации образовательных программ в рамках математического моделирования.

Методология и методы исследования. При исследовании вариационных постановок задач использовался аппарат функционального анализа [60; 61], теория выпуклого анализа [62], теория пространств С. Л. Соболева [8; 60; 63; 64], общая теория нелинейных краевых задач [3; 65]. Обсуждение понятий рефлексивности функциональных пространств, слабой сходимости, слабой замкнутости, слабой компактности можно найти в [66; 67].

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Математический аппарат, основанный на методах двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа, для исследования контактных задач механики со свободной границей (модельная задача теории упругости с трещиной; контактная задача для двух упругих тел; задача о теле, содержащем тонкий дефект с параметром).
2. Применение эффективных численных алгоритмов с одновременной конечно-элементной аппроксимацией для решения поставленных задач.
3. Комплекс вычислительных программ на языке C++, реализующих численные алгоритмы, которые позволяют эффективно решать контактные задачи механики.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью постановки рассматриваемых задач и методов их исследования, строгостью математических рассуждений при доказательстве теорем, применением апробированных численных алгоритмов. Результаты численных расчетов при решении задач разными методами совпадают (в рамках допустимых погрешностей) и находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на: Всероссийской научной конференции «XXXVIII Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е. В. Золотова», г. Владивосток (сентябрь 2014 г.) [94]; XV Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения», г. Екатеринбург (март 2015 г.) [95]; III Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления», г. Хабаровск (июль 2015 г.) [96]; Международной конференции «Торическая топология, теория чисел и их приложения», г. Хабаровск (сентябрь 2015 г.) [97]; II Дальневосточной школе-семинаре «Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций», г. Комсомольск-на-Амуре (сентябрь 2017 г.) [98]; 5-й Дальневосточной конференции с международным участием «Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении», г. Комсомольск-на-Амуре (сентябрь 2018 г.) [99]; Международном семинаре «International Workshop on Computing Technologies and Applied Mathematics», г. Владивосток (июль 2022 г.) и г. Благовещенск (июнь 2023 г.); на конкурсе молодых ученых Хабаровского края (2015, 2016, 2017, 2019 годы).

Личный вклад. Автор принимал активное участие в разработке и обосновании модифицированных методов двойственности для исследования представленных контактных задач механики. Все реализации алгоритмов, написание компьютерных программ, а также численные расчеты проводились автором лично. Автор принимал активное участие в анализе и интерпретации полученных результатов, в оформлении публикаций в виде научных статей и докладов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 12 научных работах, из них 5 статей — в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России; 7 публикаций — в сборниках материалов и тезисов конференций. Получено 5 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Связь работы с научными темами и программами. Результаты диссертационной работы частично получены автором при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 122082400001-8).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и одного приложения. Полный объём диссертации составляет 141 страницу. Список литературы содержит 110 наименований.

Краткое содержание работы

Первая глава работы посвящена вопросам применения метода множителей Лагранжа для решения задач конечномерного выпуклого программирования. Обосновано применение функции Лагранжа для задач, в которых целевая функция является выпуклой, но не обязательно сильно выпуклой. Показано, что функция чувствительности при этом является лишь полунепрерывной снизу. На примере задачи Синьорини рассмотрено применение схемы двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа: осуществлена аппроксимация задачи по методу конечных элементов, реализован алгоритм Уздавы поиска седловой точки, реализована модификация метода поточечной релаксации на первом шаге алгоритма Уздавы, проведены серии вычислительных экспериментов.

Во второй главе модифицированные функционалы Лагранжа использованы для решения задачи бесконечномерного выпуклого программирования с нелинейными краевыми условиями — модельной задачи теории упругости с трещиной. Исследован модифицированный функционал Лагранжа и обоснованы его основные свойства. Осуществлена конечно-элементная аппроксимация задачи, реализован алгоритм Уздавы, проведены вычислительные эксперименты.

В третьей главе исследованы возможности применения модифицированных функционалов Лагранжа для решения задачи о контакте двух тел. Это задача в перемещениях и с коэффициентами, учитывающими физические характеристики материалов тел. Изучены характеристики функционала чувствительности. Построена и исследована схема двойственности с одновременной итеративной проксимальной регуляризацией функционала Лагранжа. Построен метод последовательных приближений для решения квазивариационного неравенства, соответствующего контактной задаче с учетом трения. Проведены вычислительные эксперименты при конечно-элементной аппроксимации задач.

В четвертой главе исследуется задача о двумерном теле с дефектом, свойства которого характеризуются параметром разрушения. Построена модифицированная схема двойственности, доказана сходимость метода конечных элементов. Осуществлена дискретизация задачи по методу конечных элементов, проведены серии вычислительных экспериментов.

В приложении представлены листинги вычислительных программ, реализующих используемые алгоритмы для решения поставленных задач, на языках программирования C# и C++ с использованием программно-аппаратной архитектуры параллельных вычислений CUDA.

Глава 1. Метод множителей Лагранжа в задаче конечномерного выпуклого программирования

Классический подход Лагранжа к исследованию экстремальных задач с ограничениями-равенствами получил существенное развитие в связи с появлением оптимизационных задач с ограничениями-неравенствами. На основе изучения классических функций Лагранжа, отвечающих задачам нелинейного программирования, были установлены важные признаки решения различных экстремальных задач с ограничениями, а для задач выпуклого программирования предложены алгоритмы, осуществляющие непосредственный поиск седловой точки классической функции Лагранжа. Такие алгоритмы, однако, сходятся медленно, и их сходимость теоретически обоснована при весьма жестких требованиях относительно выпуклости и дифференцируемости входящих в задачу функций [45; 47]. Рассмотрение модифицированных функций Лагранжа позволило разработать новый класс методов, в которых указанные недостатки проявляются в значительно меньшей степени. При этом развитие новых методов двойственности для задачи нелинейного программирования с ограничениями-неравенствами, как правило, осуществляется с помощью предварительного сведения исходной задачи к задаче с ограничениями-равенствами [45; 47]. В данной главе исследование модифицированных функций Лагранжа для задачи выпуклого программирования осуществляется средствами выпуклого анализа, без сведения к задаче с ограничениями-равенствами.

1.1 Функция чувствительности

Рассмотрим задачу конечномерного выпуклого программирования

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \min_{x \in X}, \\ X = \{z \in \mathbb{R}^n : g^j(z) \leq 0, j = \overline{1, m}\}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $f(\cdot)$, $g^j(\cdot)$ — выпуклые (и, следовательно, непрерывные) на \mathbb{R}^n функции. Функция $\varphi(\cdot)$ называется выпуклой на множестве A , если для любых двух значений

аргумента $x, y \in A$ и любого числа $t \in [0, 1]$ имеет место $\varphi(tx + (1 - t)y) \leq t\varphi(x) + (1 - t)\varphi(y)$.

Предположим, что X — компактное множество, и пусть выполняется условие Слейтера, т. е. существует точка $\tilde{x} \in X$ такая, что $g^j(\tilde{x}) < 0, j = \overline{1, m}$. Тогда, как известно [43; 46], классическая функция Лагранжа $L(x, p) = f(x) + \sum_{j=1}^m p_j g^j(x)$ имеет седловую точку $(x^*, p^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$, т. е.

$$L(x^*, p) \leq L(x^*, p^*) \leq L(x, p^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall p \in \mathbb{R}_+^m.$$

При этом x^* является решением исходной задачи (1.1), а p^* есть решение двойственной задачи [44; 46]:

$$\begin{cases} \underline{L}(p) \rightarrow \max_{p \in X^*}, \\ X^* = \{\omega \in \mathbb{R}_+^m : \underline{L}(\omega) > -\infty\}, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $\underline{L}(p) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + \sum_{j=1}^m p_j g^j(x)\}$.

Эффективная область двойственной функции $\underline{L}(\cdot)$ может не совпадать с \mathbb{R}^m , что затрудняет решение задачи (1.2).

На пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ вспомогательную функцию $K_r(\cdot, \cdot, \cdot)$ определим следующим образом [44]

$$K_r(x, p, v) = \begin{cases} f(x) + \sum_{j=1}^m p_j v_j + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m v_j^2, & \text{если } g(x) \leq v, \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь и далее $g(x) = (g^1(x), \dots, g^m(x))$, $r > 0$ — константа. Два вектора m -мерного евклидова пространства находятся в отношении \leq , если каждая пара соответствующих компонент этих векторов находится в отношении \leq .

На основе $K_r(\cdot, \cdot, \cdot)$ строится модифицированная функция Лагранжа

$$\begin{aligned}
M(x, p) &= \inf_{v \in \mathbb{R}^m} K_r(x, p, v) = \inf_{\substack{v \in \mathbb{R}^m: \\ v \geq g(x)}} \left\{ f(x) + \sum_{j=1}^m p_j v_j + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m v_j^2 \right\} = \\
&= f(x) + \frac{1}{2r} \inf_{v \geq g(x)} \sum_{j=1}^m ((p_j + r v_j)^2 - p_j^2) = \\
&= f(x) + \frac{1}{2r} \sum_{j=1}^m \inf_{v_j \geq g^j(x)} ((p_j + r v_j)^2 - p_j^2) = \\
&= f(x) + \frac{1}{2r} \sum_{j=1}^m (((p_j + r g^j(x))^+)^2 - p_j^2).
\end{aligned}$$

Обозначение $(\varphi)^+$ называем положительной срезкой $(\varphi)^+ = \max\{0, \varphi\}$.

Рассмотрим модифицированную двойственную функцию

$$\underline{M}(p) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} M(x, p) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \inf_{v \in \mathbb{R}^m} K_r(x, p, v).$$

Так как $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \inf_{v \in \mathbb{R}^m} K_r(x, p, v) = \inf_{v \in \mathbb{R}^m} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} K_r(x, p, v)$, то

$$\underline{M}(p) = \inf_{v \in \mathbb{R}^m} \inf_{g(x) \leq v} \left\{ f(x) + \sum_{j=1}^m p_j v_j + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m v_j^2 \right\} = \inf_{v \in \mathbb{R}^m} \left\{ \chi(v) + \sum_{j=1}^m p_j v_j + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m v_j^2 \right\},$$

где функция

$$\chi(v) = \begin{cases} \inf_{g(x) \leq v} f(x), & \text{если } \{x: g(x) \leq v\} \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

называется функцией чувствительности [44; 68].

Таким образом, модифицированная двойственная функция $\underline{M}(\cdot)$ имеет двоякое представление

$$\underline{M}(p) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \frac{1}{2r} \sum_{j=1}^m (((p_j + r g^j(x))^+)^2 - p_j^2) \right\}, \quad (1.3)$$

$$\underline{M}(p) = \inf_{v \in \mathbb{R}^m} \left\{ \chi(v) + \sum_{j=1}^m p_j v_j + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m v_j^2 \right\}. \quad (1.4)$$

Определение 1. Пара $(\bar{x}, \bar{p}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ называется седловой точкой для $M(\cdot, \cdot)$, если

$$M(\bar{x}, p) \leq M(\bar{x}, \bar{p}) \leq M(x, \bar{p}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall p \in \mathbb{R}^m.$$

В определении седловой точки для модифицированной функции Лагранжа левое неравенство должно выполняться для всех $p \in \mathbb{R}^m$, в отличие от определения седловой точки для классической функции Лагранжа. Известно, что функции $L(\cdot, \cdot)$ и $M(\cdot, \cdot)$ обладают одним и тем же множеством седловых точек [43; 44], что позволяет вместо классической функции Лагранжа $L(\cdot, \cdot)$ для поиска седловых точек использовать ее модифицированный аналог $M(\cdot, \cdot)$. При построении и исследовании методов двойственности, основанных на модифицированных функциях Лагранжа, возникает естественный вопрос о разрешимости задачи (1.3) либо задачи (1.4). Отметим, что из разрешимости одной задачи вытекает разрешимость другой. В литературе, как правило, исследуется задача (1.3) [45; 47]. Для её разрешимости достаточно предположить, что $f(\cdot)$ есть сильно выпуклая функция. В данной работе, при наиболее общих предположениях о выпуклости функций $f(\cdot)$ и $g^j(\cdot)$, $j = \overline{1, m}$, исследуется вопрос о разрешимости задачи (1.4).

Если допустимое множество X в задаче (1.1) является компактным множеством, то и множества вида $X_v = \{x: g(x) \leq v\} \quad \forall v \in \mathbb{R}^m$, при условии, что $X_v \neq \emptyset$, также являются компактными [44]. Нетрудно увидеть, что в этом случае $\chi(\cdot)$ есть собственная выпуклая функция [4].

Теорема 1. Пусть в задаче (1.1) множество X является компактным. Тогда функция чувствительности $\chi(\cdot)$ полунепрерывна снизу.

Доказательство. Возьмем последовательность $\{v^k\} \subset \text{dom } \chi$ такую, что $\lim_{k \rightarrow \infty} v^k = \hat{v}$. Обозначим $x(v^k) = \underset{x \in X_{v^k}}{\text{argmin}} f(x)$. Очевидно, что $f(x(v^k)) = \chi(v^k)$. Так как $\{v^k\}$ — ограниченная последовательность в \mathbb{R}^m , то $\{x(v^k)\}$ является ограниченной последовательностью в \mathbb{R}^n . Не ограничивая общности, можно считать, что $\{x(v^k)\}$ есть сходящаяся последовательность. Пусть $\hat{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x(v^k)$. Получаем

$$f(\hat{x}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x(v^k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x(v^k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \chi(v^k).$$

Так как $g^j(x(v^k)) \leq v_j^k$, $j = \overline{1, m}$, то, переходя к пределу по k , получим $g^j(\hat{x}) \leq \hat{v}_j$, $j = \overline{1, m}$. Поэтому $X_{\hat{v}} \neq \emptyset$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \chi(v^k) = f(\hat{x}) \geq \chi(\hat{v})$. Приходим к выводу, что $\chi(\cdot)$ является функцией полунепрерывной снизу. \square

Для каждого фиксированного $p \in \mathbb{R}^m$ рассмотрим функцию $F_p(v) = \chi(v) + \sum_{j=1}^m p_j v_j + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m v_j^2$, которая, вместе с $\chi(\cdot)$, полунепрерывна снизу на \mathbb{R}^m и является сильно выпуклой на $\text{dom } \chi$ (обычно понятие сильной выпуклости применяется

для функций, принимающих конечные значения на всем пространстве). Из полунепрерывности снизу функции чувствительности $\chi(\cdot)$ следует, что ее надграфик $\text{epi } \chi = \{(v, a) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : \chi(v) \leq a\}$ является выпуклым замкнутым множеством в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$.

По теореме отделимости Мазура [69], существуют такие $\psi \in \mathbb{R}^m$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, что

$$\langle \psi, v \rangle_{\mathbb{R}^m} + \chi(v) + \alpha \geq 0 \quad \forall v \in \text{dom } \chi,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}$ — скалярное произведение в \mathbb{R}^m .

Из этих рассуждений следует, что $F_p(v) \rightarrow +\infty$ при $v \in \mathbb{R}^m$ и $\|v\|_{\mathbb{R}^m} \rightarrow \infty$, т. е. $F_p(\cdot)$ есть коэрцитивная на \mathbb{R}^m функция. Вместе с сильной выпуклостью это гарантирует существование единственного элемента $v(p) = \underset{v \in \mathbb{R}^m}{\text{argmin}} F_p(v)$. Таким образом, задача (1.4) разрешима.

1.2 Метод решения двойственной задачи

Рассмотрим модифицированную двойственную задачу

$$\begin{cases} \underline{M}(p) \rightarrow \max, \\ p \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (1.5)$$

Известно, что задачи (1.2) и (1.5) равносильны [43; 44]. Но в отличие от (1.2) двойственная функция $\underline{M}(\cdot)$ в задаче (1.5) является гладкой. Это позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Функция $\underline{M}(\cdot)$ дифференцируема на \mathbb{R}^m , ее производная $\nabla \underline{M}(\cdot)$ равна $v(p) = \underset{v \in \mathbb{R}^m}{\text{argmin}} F_p(v)$ и, более того:*

$$\|v(\hat{p}) - v(\hat{p}')\|_{\mathbb{R}^m} \leq \frac{1}{r} \|\hat{p} - \hat{p}'\|_{\mathbb{R}^m} \quad \forall \hat{p}, \hat{p}' \in \mathbb{R}^m.$$

Доказательство. Благодаря третьему слагаемому функция $F_p(\cdot)$ является сильно выпуклой. Пусть $\hat{p}, \hat{p}' \in \mathbb{R}^m$, $\hat{v} = v(\hat{p})$, $\hat{v}' = v(\hat{p}')$. Подставив их в один из критериев

сильной выпуклости, получаем

$$\begin{aligned} \chi(\hat{v}) + \sum_{j=1}^m \hat{p}_j \hat{v}_j + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m \hat{v}_j^2 + \frac{r}{2} \|\hat{v} - \hat{v}\|_{\mathbb{R}^m}^2 &\leq \chi(\hat{v}) + \sum_{j=1}^m \hat{p}_j \hat{v}_j + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m \hat{v}_j^2, \\ \chi(\hat{v}) + \sum_{j=1}^m \hat{p}_j \hat{v}_j + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m \hat{v}_j^2 + \frac{r}{2} \|\hat{v} - \hat{v}\|_{\mathbb{R}^m}^2 &\leq \chi(\hat{v}) + \sum_{j=1}^m \hat{p}_j \hat{v}_j + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m \hat{v}_j^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Складывая два неравенства, получим

$$\begin{aligned} r \|\hat{v} - \hat{v}\|_{\mathbb{R}^m}^2 &\leq \sum_{j=1}^m (\hat{p}_j - \hat{p}_j) (\hat{v}_j - \hat{v}_j), \\ r \|\hat{v} - \hat{v}\|_{\mathbb{R}^m}^2 &\leq \langle \hat{p} - \hat{p}, \hat{v} - \hat{v} \rangle_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Отсюда вытекает

$$\|\hat{v} - \hat{v}\|_{\mathbb{R}^m} \leq \frac{1}{r} \|\hat{p} - \hat{p}\|_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.8)$$

Из (1.6) также следует двустороннее неравенство

$$\sum_{j=1}^m \hat{p}_j (\hat{v}_j - \hat{v}_j) + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m (\hat{v}_j^2 - \hat{v}_j^2) \leq \chi(\hat{v}) - \chi(\hat{v}) \leq \sum_{j=1}^m \hat{p}_j (\hat{v}_j - \hat{v}_j) + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m (\hat{v}_j^2 - \hat{v}_j^2),$$

поэтому

$$\lim_{\hat{p} \rightarrow \hat{p}} \chi(\hat{v}) = \chi(\hat{v}).$$

Отсюда, а также из (1.8) следует, что вогнутая функция $\underline{M}(\cdot)$ является непрерывной на \mathbb{R}^m . Поэтому субдифференциал $\partial(-\underline{M}(p))$ выпуклой функции $(-\underline{M}(p))$ не пуст в любой точке $p \in \mathbb{R}^m$. Для доказательства дифференцируемости $\underline{M}(\cdot)$ достаточно показать, что $\partial(-\underline{M}(p))$ состоит только из одного элемента [4].

Зафиксируем произвольный вектор $p \in \mathbb{R}^m$, и пусть $(-t) \in \partial(-\underline{M}(p))$. Для любого $\xi \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$\underline{M}(\xi) \leq \underline{M}(p) + \sum_{j=1}^m t_j (\xi_j - p_j),$$

т. е.

$$\begin{aligned}
& \chi(v(\xi)) + \sum_{j=1}^m \xi_j v_j(\xi) + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m v_j^2(\xi) \leq \\
& \leq \chi(v(p)) + \sum_{j=1}^m p_j v_j(p) + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m v_j^2(p) + \sum_{j=1}^m t_j (\xi_j - p_j) \leq \\
& \leq \chi(v(\xi)) + \sum_{j=1}^m p_j v_j(\xi) + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m v_j^2(\xi) + \sum_{j=1}^m t_j (\xi_j - p_j),
\end{aligned}$$

поэтому для любых $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\beta > 0$ справедливо

$$\beta^{-1} \sum_{j=1}^m (v_j(\xi) - t_j)(\xi_j - p_j) \leq 0.$$

Возьмем $\xi = p + \beta q$, $q \in \mathbb{R}^m$ — произвольный вектор. Переходя к пределу при $\beta \rightarrow +0$, с учетом (1.8), получим

$$\sum_{j=1}^m (v_j(p) - t_j) q_j \leq 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^m.$$

Это означает, что $t = v(p)$. Из единственности элемента $v(p) = \operatorname{argmin}_{v \in \mathbb{R}^m} F_p(v)$ и неравенства (1.8) вытекает доказательство теоремы. \square

Рассмотрим градиентный метод решения двойственной задачи (1.5)

$$p^{k+1} = p^k + \theta v(p^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (p^0 \in \mathbb{R}^m \text{ — задано}), \quad (1.9)$$

$\theta > 0$ — длина шага сдвига.

Из неравенства (1.8) следует, что $\nabla \underline{M}(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\frac{1}{r}$. Это позволяет использовать для решения двойственной задачи градиентные алгоритмы, исследованные в [47; 70].

Функция $\underline{M}(\cdot)$ ограничена сверху величиной $\min_{x \in X} f(x)$. Поэтому для $0 < \theta < 2r$ в градиентном методе (1.9) имеет место предельное соотношение $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla \underline{M}(p^k)\| = 0$ [47, стр. 31].

Теорема 3. Пусть $0 < \theta < 2r$. Тогда последовательность $\{p^k\}$, генерируемая по методу (1.9), сходится к решению двойственной задачи (1.5).

Доказательство. Обозначим Y^* — множество решений задачи (1.5). Пусть $p \in Y^*$, тогда $v(p) = \nabla \underline{M}(p) = 0$.

Далее, пользуясь (1.7), получим

$$\begin{aligned}
\|p - p^{k+1}\|_{\mathbb{R}^m}^2 &= \|p + \theta v(p) - p^k - \theta v(p^k)\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \|(p - p^k) + \theta(v(p) - v(p^k))\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \\
&= \|p - p^k\|_{\mathbb{R}^m}^2 + 2\theta \langle p - p^k, v(p) - v(p^k) \rangle_{\mathbb{R}^m} + \theta^2 \|v(p) - v(p^k)\|_{\mathbb{R}^m}^2 \leq \\
&\leq \|p - p^k\|_{\mathbb{R}^m}^2 - 2\theta r \|v(p) - v(p^k)\|_{\mathbb{R}^m}^2 + \theta^2 \|v(p) - v(p^k)\|_{\mathbb{R}^m}^2 \leq \\
&\leq \|p - p^k\|_{\mathbb{R}^m}^2 - \theta(2r - \theta) \|v(p^k)\|_{\mathbb{R}^m}^2 \leq \|p - p^k\|_{\mathbb{R}^m}^2.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Следовательно, $\{p^k\}$ есть ограниченная последовательность и, кроме того, существует $\lim_{k \rightarrow \infty} \|p - p^k\|_{\mathbb{R}^m}^2$.

Пусть $\bar{p} = \lim_{j \rightarrow \infty} p^{k_j}$. Из (1.10) вытекает

$$\|p^{k_j+1} - p\|_{\mathbb{R}^m}^2 \leq \|p^{k_j} - p\|_{\mathbb{R}^m}^2 - \theta(2r - \theta) \|v(p^{k_j})\|_{\mathbb{R}^m}^2,$$

тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|p^{k_j+1} - p\|_{\mathbb{R}^m}^2 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} (\|p^{k_j} - p\|_{\mathbb{R}^m}^2 - \theta(2r - \theta) \|v(p^{k_j})\|_{\mathbb{R}^m}^2),$$

$$\|\bar{p} - p\|_{\mathbb{R}^m}^2 \leq \|\bar{p} - p\|_{\mathbb{R}^m}^2 - \theta(2r - \theta) \|v(\bar{p})\|_{\mathbb{R}^m}^2.$$

Отсюда следует, что $v(\bar{p}) = 0$, т. е. $\bar{p} \in Y^*$.

Возьмем $p = \bar{p}$. Тогда $\lim_{j \rightarrow \infty} \|p^{k_j+1} - \bar{p}\|_{\mathbb{R}^m} = 0$. С учетом неравенств $\|p^l - \bar{p}\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|p^{k_j} - \bar{p}\|_{\mathbb{R}^m}$ для $l \geq k_j$, получим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} p^k = \bar{p}$. \square

Градиентный метод (1.9) можно переписать следующим образом [44; 47]:

$$\begin{aligned}
(i) \quad x^{k+1} &= \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} M(x, p^k), \\
(ii) \quad p_j^{k+1} &= p_j^k + \theta \max\{g^j(x^{k+1}), -\frac{p_j^k}{r}\}, \quad j = \overline{1, m}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Если $\theta = r$, то из (ii) вытекает, что $p^{k+1} = (p^k + r g(x^{k+1}))^+$.

В предположении, что допустимое множество X в задаче (1.1) является компактным и выполняется условие Слейтера, модифицированная функция Лагранжа $M(\cdot, \cdot)$ имеет седловую точку. Для метода (1.11) справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Любая предельная точка последовательности $\{(x^k, p^k)\}$, генерируемой методом (1.11), является седловой точкой для $M(\cdot, \cdot)$.*

Доказательство. Согласно теореме 3 последовательность $\{p^k\}$ — сходящаяся. Нетрудно показать, что $x^{k+1} = \operatorname{argmin}_{g(x) \leq v(p^k)} f(x)$, где $v(p^k) = \operatorname{argmin}_{v \in \mathbb{R}^m} F_{p^k}(v)$. Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v(p^k)\|_{\mathbb{R}^m} = 0$, то $\{x^k\}$ является ограниченной последовательностью в \mathbb{R}^n .

Пусть (\tilde{x}, \tilde{p}) — предельная точка последовательности $\{(x^k, p^{k-1})\}$, т. е. $(\tilde{x}, \tilde{p}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \{(x^{k_i}, p^{k_i-1})\}$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. По теореме 3 $\tilde{p} = \lim_{k \rightarrow \infty} p^k$ и $\tilde{p} \in Y^*$. Из полунепрерывности снизу $\chi(\cdot)$ вытекает, что

$$\varliminf_{k \rightarrow \infty} \left\{ \chi(v(p^k)) + \sum_{j=1}^m p_j v_j(p^k) + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m v_j^2(p^k) \right\} \geq \chi(0).$$

Кроме того:

$$\begin{aligned} M(p^k) &= \chi(v(p^k)) + \sum_{j=1}^m p_j v_j(p^k) + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m v_j^2(p^k) = \\ &= \inf_{v \in \mathbb{R}^m} \left\{ \chi(v) + \sum_{j=1}^m p_j v_j + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m v_j^2 \right\} \leq \chi(0), \end{aligned}$$

поэтому

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \chi(v(p^k)) + \sum_{j=1}^m p_j v_j + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m v_j^2(p^k) \right\} \leq \chi(0).$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \chi(v(p^k)) + \sum_{j=1}^m p_j v_j(p^k) + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m v_j^2(p^k) \right\} = \chi(0) = \inf_{g(x) \leq 0} f(x).$$

Так как $f(x^{k_i}) = \chi(v(p^{k_i-1}))$, то

$$f(\tilde{x}) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x^{k_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \chi(v(p^{k_i-1})) = \chi(0).$$

Значит, \tilde{x} есть решение задачи (1.1). □

1.3 Применение метода для численного решения конечномерной задачи Синьорини

В этом разделе опишем применение метода множителей Лагранжа для поиска решения вариационной задачи на конечномерном подпространстве гильбертова пространства $H^1(\Omega)$. В качестве такой задачи рассмотрим классический

пример — скалярную задачу Синьорини. Это модельная задача с эллиптическим уравнением второго порядка с краевыми условиями в виде неравенств. Достаточное полное её исследование можно найти в монографии Фикеры [71].

1.3.1 Постановка задачи Синьорини

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей. Требуется найти функцию u , удовлетворяющую системе условий

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{в } \Omega, \\ u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{на } \partial\Omega = \Gamma, \end{cases} \quad (1.12)$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к границе Γ , f — заданная функция.

Эту задачу можно сформулировать как вариационную. Для этого определим множество

$$K = \{v \in H^1(\Omega) : v \geq 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Тогда вариационная формулировка задачи (1.12) представляет собой задачу минимизации на множестве K :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega - \int_{\Omega} f v d\Omega \rightarrow \min_{v \in K}. \quad (1.13)$$

Функция u , на которой достигается минимум функционала $J(\cdot)$, называется обобщенным решением задачи (1.12).

Так как билинейная форма $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega$ не является положительно определенной в $H^1(\Omega)$, то задача (1.13) может не иметь решения. Однако если

$$\int_{\Omega} f d\Omega < 0, \quad (1.14)$$

то $J(v) \rightarrow +\infty$ при $\|v\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow \infty$ ($v \in K$) и задача разрешима. Более того, условие (1.14) обеспечивает единственность решения.

1.3.2 Аппроксимация и алгоритм решения

Пусть область Ω представляет собой единичный квадрат. Будем решать три задачи, с разным видом функции f (рисунок 1.1). Очевидно, условие разрешимости (1.14) для каждой из этих задач выполнено.

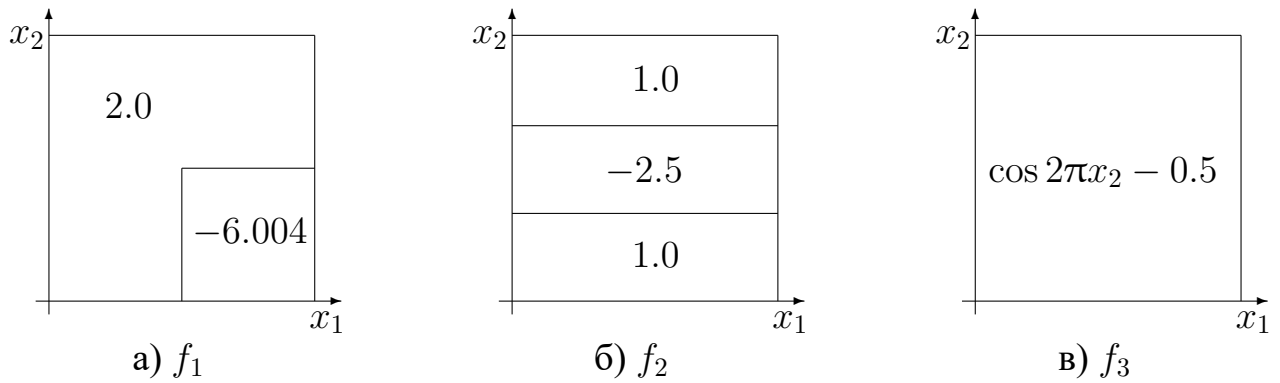


Рисунок 1.1 — Различные значения функции f для задачи Синьорини

Триангуляцию T_h проведем с помощью равномерной сетки (рисунок 1.2а). Конечные элементы внутри области имеют вид шестиугольников (рисунок 1.2б), на границе области конечные элементы являются усеченными. Множество индексов узлов триангуляции обозначим I , а множество индексов граничных узлов — I_Γ .

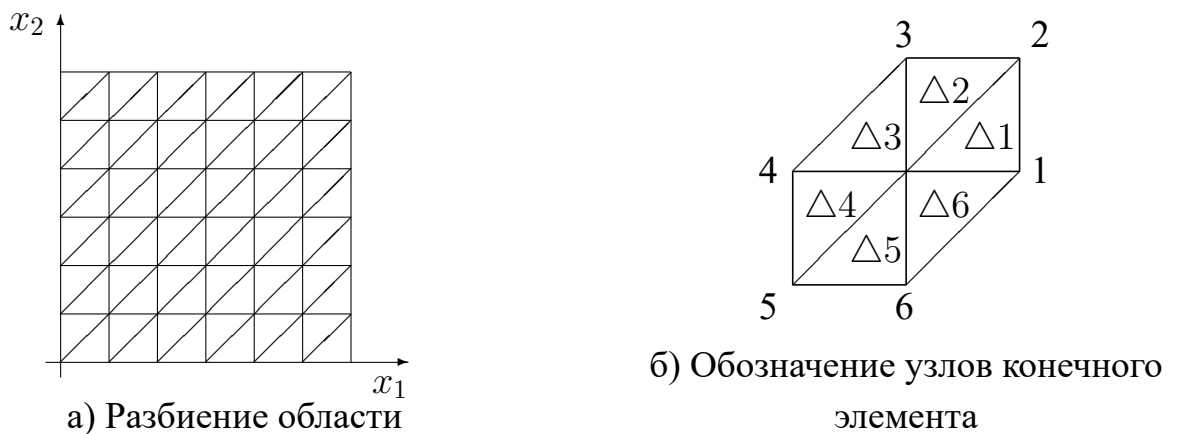


Рисунок 1.2 — Триангуляция T_h

Для каждого конечного элемента зададим базисную функцию по формуле

$$\varphi_i(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{x_i-x}{h}, & (x,y) \in \Delta 1, \\ 1 + \frac{y_i-y}{h}, & (x,y) \in \Delta 2, \\ 1 + \frac{x-x_i}{h} + \frac{y_i-y}{h}, & (x,y) \in \Delta 3, \\ 1 + \frac{x-x_i}{h}, & (x,y) \in \Delta 4, \\ 1 + \frac{y-y_i}{h}, & (x,y) \in \Delta 5, \\ 1 + \frac{x_i-x}{h} + \frac{y-y_i}{h}, & (x,y) \in \Delta 6. \end{cases} \quad (1.15)$$

Линейная оболочка базисных функций $V_h = \{v_h : v_h = \sum_{k \in I} v_k \varphi_k, v_k \in \mathbb{R}\}$. Соответственно множество K заменяется на $K_h = \{v_h \in V_h : v_h \geq 0 \text{ на } \Gamma\}$.

Полученную дискретную задачу $J(v_h) \rightarrow \min_{v_h \in K_h}$ перепишем в виде

$$\begin{cases} I(y) = \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle - \langle F, y \rangle \rightarrow \min_{y \in \hat{K}_h}, \\ \hat{K}_h = \{y \in \mathbb{R}^{|I|} : y_i \geq 0 \text{ если } i \in I_\Gamma\}, \end{cases} \quad (1.16)$$

здесь A — матрица жесткости, F — вектор нагрузки, рассчитываемые по формулам

$$A = \left\{ \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\Omega \right\}_{i,j \in I}, \quad F = \left\{ \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega \right\}_{i \in I}.$$

Обозначение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ используется для скалярного произведения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{|I|}$.

Минимизируемая функция $I(\cdot)$ и ограничения ($-y_i \leq 0$ для $i \in I_\Gamma$) — выпуклые. Множество \hat{K}_h компактное. Выполнение условия (1.14) гарантирует существование решения. Используем для решения задачи (1.16) описанный ранее метод модифицированных функций Лагранжа.

Функция Лагранжа определена на множестве $\mathbb{R}^{|I|} \times \mathbb{R}^{|I_a|}$

$$M(y,p) = \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle - \langle F, y \rangle + \frac{1}{2r} \sum_{j \in I_\Gamma} ((p_j - r y_j)^+)^2 - p_j^2.$$

Метод Удзавы для поиска седловой точки

$$\begin{aligned} (i) \quad & y^{k+1} = \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{R}^{|I|}} M(y, p^k), \\ (ii) \quad & p_j^{k+1} = p_j^k + \theta \max\{-y_j^{k+1}, -\frac{p_j^k}{r}\}, \quad j = \overline{1, |I_\Gamma|}, \quad \theta \in (0, 2r). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Запишем алгоритм (1.17) при помощи псевдокода.

```

1 repeat
2    $y^{k+1} = \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{R}^{|I|}} \left\{ \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle - \langle F, y \rangle + \frac{1}{2r} \sum_{i \in I_\Gamma} \left( (p_i^k - ry_i)^+ \right)^2 - (p_i^k)^2 \right\};$ 
3   for  $j \in I_\Gamma$  do
4      $p_j^{k+1} = p_j^k + r \max \left\{ -y_j^{k+1}, -\frac{p_j^k}{r} \right\};$ 
5   end
6 until  $\max_{j \in I_\Gamma} |p_j^{k+1} - p_j^k| \leq 1000 \cdot \varepsilon \cdot h;$ 

```

Алгоритм 1: Задача Синьорини.

Функция $M(\cdot, \cdot)$ непрерывно дифференцируема по y_i ($i \in I$), при этом

$$\frac{\partial M(y, p)}{\partial y_i} = \begin{cases} \sum_{j \in I} A_{ij} y_j - F_i, & i \in I \setminus I_\Gamma, \\ \sum_{j \in I} A_{ij} y_j - F_i - (p_i - ry_i)^+, & i \in I_\Gamma. \end{cases}$$

Значит, на первом шаге алгоритма можно применить модификацию метода поточечной релаксации. Для внутренних узлов ($i \in I \setminus I_\Gamma$) расчетная формула

$$y_i^{k+1} = -\frac{1}{A_{ii}} \left(\sum_{j < i} A_{ij} y_j^{k+1} + \sum_{j > i} A_{ij} y_j^k - F_i \right).$$

Для граничных узлов предварительно вычисляется:

$$\psi_i = -\frac{1}{A_{ii}} \left(\sum_{j < i} A_{ij} y_j^{k+1} + \sum_{j > i} A_{ij} y_j^k - F_i \right),$$

далее полагается

$$y_i^{k+1} = \begin{cases} \psi_i, & \text{если } \psi_i \geq \frac{p_i^k}{r}, \\ -\frac{1}{A_{ii}+r} \left(\sum_{j < i} A_{ij} y_j^{k+1} + \sum_{j > i} A_{ij} y_j^k - F_i - p_i^k \right), & \text{если } \psi_i < \frac{p_i^k}{r}. \end{cases}$$

Критерий остановки счета в методе поточечной релаксации:

$$\max_{i \in I} |y_i^{k+1} - y_i^k| \leq \varepsilon \cdot h.$$

Значение двойственной переменной на втором шаге можно пересчитывать по формуле

$$p_j^{k+1} = (p_j^k - \theta y_j^{k+1})^+, \quad j \in I_\Gamma.$$

1.3.3 Результаты вычислительных экспериментов

Коэффициенты матрицы A рассчитываются точно, коэффициенты вектора F — методом численного интегрирования (значения функции f показаны на рисунке 1.1).

Расчеты проведены при $\varepsilon = 10^{-4}$, $r = 150$ для разного шага триангуляции. В таблице 1 представлено количество итераций для внутреннего и внешнего цикла, а также время счета (хотя оно и не показательно, поскольку зависит от ЭВМ).

Таблица 1 — Число итераций метода при разном шаге триангуляции

	Шаг сетки h	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
f_1	Число внешних итераций	2	2	2	2	2	2
	Число внутренних итерации	440	1934	7925	30014	103056	321979
	Время выполнения, (с)	0	0	0	14	196	2339
f_2	Число внешних итераций	2	2	2	2	2	2
	Число внутренних итерации	108	481	478	3080	4628	14551
	Время выполнения, (с)	0	0	0	1	8	107
f_3	Число внешних итераций	1	1	2	2	2	2
	Число внутренних итерации	27	123	569	2554	11357	50016
	Время выполнения, (с)	0	0	0	1	21	368

На рисунке 1.3 изображено решение задачи для f_1 при $h = \frac{1}{32}$.

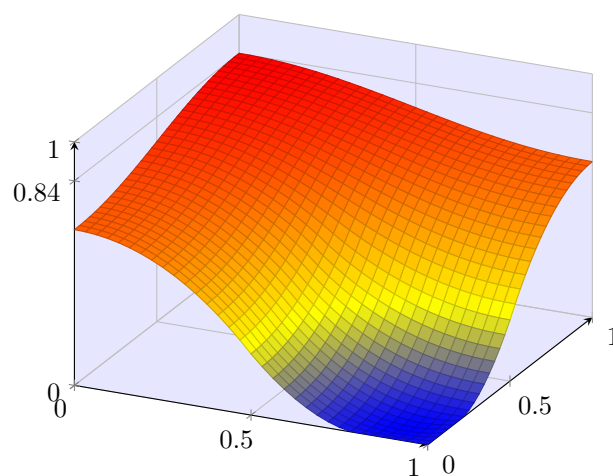


Рисунок 1.3 — Решение задачи Синьорини для f_1 ($h = 1/32$)

На первом шаге алгоритма 1 можно использовать метод поточечной релаксации с проектированием [5]. Для сравнения: при той же точности и шаге триангуляции $h = \frac{1}{64}$ он приводит к решению задачи с f_1 за 30001 итерацию.

Решение задач для f_2 и f_3 представлено на рисунке 1.4.

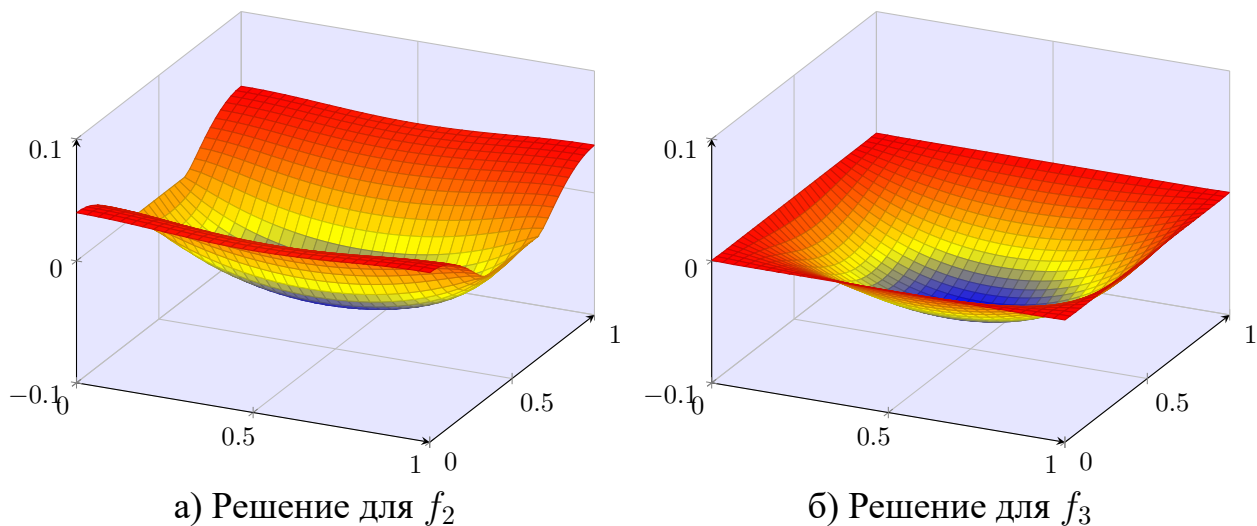


Рисунок 1.4 — Решения задачи Синьборини для разных значений f ($h = 1/32$)

Глава 2. Модельная задача теории упругости с трещиной

В этой главе рассматривается возможность применения модифицированных функционалов Лагранжа для решения задачи бесконечномерного выпуклого программирования с нелинейными краевыми условиями.

Классический подход к описанию задачи о равновесии упругого тела с трещиной состоит в том, что на берегах трещины задаются краевые условия вида равенств [39]. Исследованию таких краевых задач посвящено большое число работ. В то же время хорошо известно, что с точки зрения приложений получаемые линейные модели имеют очевидный недостаток: противоположные берега трещины могут проникать друг в друга.

В монографии [38] анализируются более сложные модели, в которых берега трещины не могут проникать друг в друга. Взаимное непроникновение достигается за счет того, что на берегах задаются нелинейные краевые условия. Анализ подобных задач можно найти в [28; 33—36; 72]. Для их решения используются различные подходы и приемы, приводятся численные расчеты.

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим двумерную модельную задачу о равновесии пластины, содержащей трещину [38, с. 58]. Полагаем, что $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная выпуклая область с границей Γ ; $\gamma \subset \Omega$ — непрерывная незамкнутая кривая без самопересечений (рисунок 2.1). Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$.

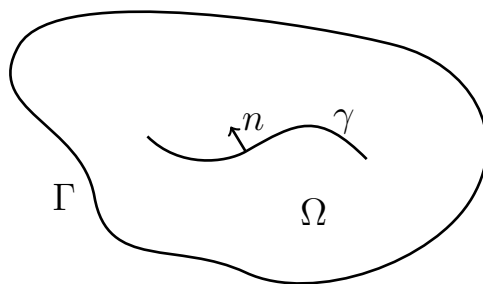


Рисунок 2.1 — Пластина с трещиной

В области Ω_γ требуется найти функцию u — такую, что:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ в } \Omega_\gamma, \\ u &= 0 \text{ на } \Gamma, \\ [u] &\geq 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}[u] = 0 \text{ на } \gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &\leq 0 \text{ на } \gamma^\pm. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $f \in L_2(\Omega)$ — заданная функция; n — выбранная нормаль к трещине; $[u] = u^+ - u^-$ — скачок функции u на γ (в каждой точке $x \in \gamma$ функция принимает два значения: u^+ и u^- , соответствующие разным берегам трещины, условно называемым верхним и нижним в зависимости от направления нормали n).

Значение функции u в области Ω можно интерпретировать как вертикальные смещения точек пластины под действием силы f относительно исходного положения.

Пусть $H_\Gamma^1(\Omega_\gamma) = \{v \in H^1(\Omega_\gamma) : v = 0 \text{ на } \Gamma\}$. Задача (2.1) соответствует задаче минимизации функционала энергии

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla v|^2 d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f v d\Omega \rightarrow \min_{v \in K}, \quad (2.2)$$

$$K = \{v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma) : [v] \geq 0 \text{ п. в. на } \gamma\}.$$

В предположении H^2 -регулярности функции u можно показать, что решение задачи (2.2) является и решением (2.1). Вопрос о разрешимости (2.2) подробно исследован в [38]. В этой монографии выявлены важные свойства функционала $J(\cdot)$:

- $J(\cdot)$ выпуклый на множестве $H^1(\Omega_\gamma)$, т. е. для любых значений аргументов $v_1, v_2 \in H^1(\Omega_\gamma)$ и любого числа $t \in [0, 1]$ выполняется

$$J(tv_1 + (1-t)v_2) \leq tJ(v_1) + (1-t)J(v_2);$$

- $J(\cdot)$ дифференцируем по Гато в любой точке пространства $H^1(\Omega_\gamma)$, т. е. для любых $v, h \in H^1(\Omega_\gamma)$ существует предел

$$dJ(v, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(v + th) - J(v)}{t};$$

- $J(\cdot)$ слабо полунепрерывен снизу на $H^1(\Omega_\gamma)$, т. е. для любого $v_0 \in H^1(\Omega_\gamma)$ выполняется

$$\liminf_{v \rightarrow v_0} J(v) \geq J(v_0);$$

– $J(\cdot)$ коэрцитивен на $H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})$, т. е. $J(v) \rightarrow +\infty$ при $\|v\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})} \rightarrow \infty$.

Из слабой полунепрерывности снизу и коэрцитивности следует, что задача (2.2) имеет решение. Применяя неравенство Фридрихса, можно показать, что это решение ещё и единственное.

2.2 Метод решения модельной задачи

Для решения задачи (2.2) применяем схему двойственности, основанную на модифицированном функционале Лагранжа. Этот метод двойственности позволяет снять ограничение $[v] \geq 0$ на γ и вместо минимизации функционала $J(\cdot)$ на K в задаче (2.2) проводить минимизацию на всем пространстве $H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})$.

2.2.1 Определение модифицированного функционала Лагранжа

Обозначим $K_m = \{v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma}) : -[v] \leq m \text{ на } \gamma\}$. Если функция $m \in L_2(\gamma)$ ограничена снизу на γ , то соответствующее ей множество K_m не является пустым. Множество K_m может быть пустым, если $m \in L_2(\gamma) \setminus H^{1/2}(\gamma)$ и не ограничена снизу на γ [15].

Определим вспомогательный функционал $K_L(\cdot, \cdot, \cdot)$ соотношением

$$K_L(v, l, m) = \begin{cases} J(v) + \int_{\gamma} l m ds, & \text{если } K_m \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{если } K_m = \emptyset. \end{cases}$$

Тогда для $l \in (L_2(\gamma))^+$ классический функционал Лагранжа можно сформировать следующим образом

$$L(v, l) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} K_L(v, l, m) = J(v) - \int_{\gamma} l[v] ds.$$

Теорема 5. Если решение u задачи (2.2) принадлежит пространству $H^2(\Omega_{\gamma})$, то классический функционал Лагранжа $L(\cdot, \cdot)$ обладает седловой точкой $(u, -\frac{\partial u}{\partial n})$ на

$H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) \times (L_2(\gamma))^+$, т. е.:

$$L(u, l) \leq L(u, -\frac{\partial u}{\partial n}) \leq L(v, -\frac{\partial u}{\partial n}) \quad \forall (v, l) \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) \times (L_2(\gamma))^+.$$

Доказательство. Так как $[u] \geq 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} \leq 0$, $-\frac{\partial u}{\partial n}[u] = 0$, получаем левую часть неравенства седловой точки

$$L(u, l) = J(u) - \int_\gamma l[u] ds \leq J(u) = J(u) - \int_\gamma (-\frac{\partial u}{\partial n})[u] ds = L(u, -\frac{\partial u}{\partial n}).$$

Чтобы показать выполнение правой части неравенства седловой точки, покажем неотрицательность разности

$$\begin{aligned} L(v, -\frac{\partial u}{\partial n}) - L(u, -\frac{\partial u}{\partial n}) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla v|^2 d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla u|^2 d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f(v-u) d\Omega - \int_\gamma (-\frac{\partial u}{\partial n})([v] - [u]) ds = \\ &= \int_{\Omega_\gamma} \nabla u \nabla(v-u) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla(v-u)|^2 d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f(v-u) d\Omega + \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}([v] - [u]) ds. \end{aligned}$$

Здесь первое, третье и четвертое слагаемые в сумме дают ноль, а второе слагаемое неотрицательно. Таким образом, $(u, -\frac{\partial u}{\partial n})$ — седловая точка классического функционала Лагранжа. \square

Теперь определим функционал $K_M(\cdot, \cdot, \cdot)$

$$K_M(v, l, m) = \begin{cases} J(v) + \int_\gamma lm ds + \frac{r}{2} \int_\gamma m^2 ds, & \text{если } K_m \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{если } K_m = \emptyset, \end{cases}$$

и построим модифицированный функционал Лагранжа

$$\begin{aligned} M(v, l) &= \inf_{m \in L_2(\gamma)} K_M(v, l, m) = \inf_{\substack{m \in L_2(\gamma): \\ -[v] \leq m}} \left\{ J(v) + \int_\gamma (lm + \frac{r}{2}m^2) ds \right\} = \\ &= J(v) + \frac{1}{2r} \inf_{\substack{m \in L_2(\gamma): \\ -[v] \leq m}} \int_\gamma ((l + rm)^2 - l^2) ds = \\ &= J(v) + \frac{1}{2r} \int_\gamma \left(((l - r[v])^+)^2 - l^2 \right) ds, \end{aligned}$$

где $r = \text{const} > 0$, $(l - r[v])^+ = \max\{0, l - r[v]\}$.

Определение 2. Пара $(v^*, l^*) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma) \times L_2(\gamma)$ называется седловой точкой функционала $M(\cdot, \cdot)$, если выполняется двустороннее неравенство

$$M(v^*, l) \leq M(v^*, l^*) \leq M(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma) \times L_2(\gamma).$$

Введем функционалы:

$$\begin{aligned} \underline{M}(l) &= \inf_{v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)} M(v, l), \\ \overline{M}(v) &= \sup_{l \in L_2(\gamma)} M(v, l). \end{aligned}$$

Если $v \in K$, то выполняется условие $-[v] \leq 0$ на γ . Тогда $K_M(v, l, 0) = J(v)$ для всех $l \in L_2(\gamma)$, и, следовательно, можно точно сказать, что

$$M(v, l) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} K_M(v, l, m) \leq J(v) \quad \forall v \in K.$$

Так что получаем

$$\overline{M}(v) = \sup_{l \in L_2(\gamma)} M(v, l) \leq J(v) \quad \forall v \in K. \quad (2.3)$$

Если $-[v] \leq m$, то

$$K_M(v, 0, m) = J(v) + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 ds.$$

Поэтому для всех $v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)$ будет верным следующее:

$$\begin{aligned} M(v, 0) &= \inf_{m \in L_2(\gamma)} K_M(v, 0, m) = \inf_{\substack{m \in L_2(\gamma): \\ -[v] \leq m}} \left\{ J(v) + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 ds \right\} = \\ &= J(v) + \frac{r}{2} \inf_{\substack{m \in L_2(\gamma): \\ -[v] \leq m}} \int_{\gamma} m^2 ds \geq J(v). \end{aligned}$$

Так что теперь получаем

$$\overline{M}(v) = \sup_{l \in L_2(\gamma)} M(v, l) \geq M(v, 0) \geq J(v) \quad \forall v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma). \quad (2.4)$$

Из (2.3) и (2.4) следует, что

$$\overline{M}(v) = J(v) \quad \forall v \in K. \quad (2.5)$$

Очевидно, что $K_M(v, l, m) \geq K_L(v, l, m)$, и, следовательно,

$$M(v, l) \geq L(v, l) \quad \forall l \in (L_2(\gamma))^+.$$

Тогда $\bar{M}(v) \geq \bar{L}(v)$, где $\bar{L}(v) = \sup_{l \in (L_2(\gamma))^+} L(v, l)$.

Если $v \notin K$, то

$$\bar{L}(v) = \sup_{l \in (L_2(\gamma))^+} L(v, l) = +\infty \quad (2.6)$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что

$$\bar{M}(v) = \begin{cases} J(v), & \text{если } v \in K, \\ +\infty, & \text{если } v \notin K. \end{cases} \quad (2.7)$$

Поэтому, используя модифицированный функционал Лагранжа, можно исходную задачу (2.2) представить в виде

$$\bar{M}(v) \rightarrow \min_{v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)}, \quad (2.8)$$

а двойственную задачу в виде

$$\underline{M}(l) \rightarrow \max_{l \in L_2(\gamma)}. \quad (2.9)$$

2.2.2 Функционал чувствительности

Определим для функции $m \in L_2(\gamma)$ функционал чувствительности

$$\chi(m) = \begin{cases} \inf_{v \in K_m} J(v), & \text{если } K_m \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{если } K_m = \emptyset. \end{cases}$$

Его эффективная область $\text{dom } \chi = \{m \in L_2(\gamma) : \chi(m) < +\infty\}$ является выпуклым, но незамкнутым множеством в $L_2(\gamma)$, причем $\overline{\text{dom } \chi} = L_2(\gamma)$.

При условии, что $m \in \text{dom } \chi$, в силу коэрцитивности функционала $J(\cdot)$ задача

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla v|^2 d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f v d\Omega \rightarrow \min_{v \in K_m} \quad (2.10)$$

имеет единственное решение, которое обозначим $u_m = \operatorname{argmin}_{-[v] \leq m} J(v)$. Тогда, по определению, $\chi(m) = J(u_m)$, а $\chi(0) = \inf_{-[v] \leq 0} J(v)$.

Покажем, что $\chi(\cdot)$ — выпуклый на $\operatorname{dom} \chi$ функционал. Пусть $m', m'' \in \operatorname{dom} \chi$ и $\chi(m') = J(v')$, $\chi(m'') = J(v'')$. Выполняются неравенства

$$-[v'] \leq m', \quad -[v''] \leq m''.$$

Домножив их соответственно на $(1 - \lambda)$ и λ (при $0 \leq \lambda \leq 1$), а затем сложив, получим:

$$-(1 - \lambda)[v'] - \lambda[v''] \leq (1 - \lambda)m' + \lambda m'', \quad \lambda \in (0, 1).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \chi((1 - \lambda)m' + \lambda m'') &= \inf_{-[v] \leq (1 - \lambda)m' + \lambda m''} J(v) \leq \\ &\leq J((1 - \lambda)[v'] + \lambda[v'']) \leq (1 - \lambda)J(v') + \lambda J(v'') = \\ &= (1 - \lambda)\chi(m') + \lambda\chi(m''). \end{aligned}$$

Лемма 1. Если $\{u_i\}$ — ограниченная последовательность в $H^1(\Omega_\gamma)$, то $\{[u_i]\}$ является компактной последовательностью в $L_2(\gamma)$.

Доказательство. Будем считать, что γ может быть продолжена до пересечения с внешней границей Γ так, что область Ω разбивается на две подобласти — Ω', Ω'' , с липшицевыми границами $\partial\Omega', \partial\Omega''$ соответственно, при этом $\gamma^+ = \partial\Omega'' \cap \gamma$, $\gamma^- = \partial\Omega' \cap \gamma$ (рисунок 2.2). Вложения $H^1(\Omega') \subset H^{1/2}(\partial\Omega') \subset H^{1/2}(\gamma^-)$ и $H^1(\Omega'') \subset H^{1/2}(\partial\Omega'') \subset H^{1/2}(\gamma^+)$ непрерывны, — следовательно, справедливы следующие оценки для норм

$$\begin{aligned} \|u'\|_{H^{1/2}(\gamma^-)} &\leq C_1 \|u'\|_{H^1(\Omega')}, \\ \|u''\|_{H^{1/2}(\gamma^+)} &\leq C_2 \|u''\|_{H^1(\Omega'')}, \end{aligned}$$

где u', u'' — сужения некоторой функции u (возможно, принимающей на γ^- и γ^+ разные значения) на областях Ω' и Ω'' соответственно.

Возведя эти неравенства во вторую степень и сложив, получим

$$\|u''\|_{H^{1/2}(\gamma^+)}^2 + \|u'\|_{H^{1/2}(\gamma^-)}^2 \leq C_2 \|u''\|_{H^1(\Omega'')}^2 + C_1 \|u'\|_{H^1(\Omega')}^2, \quad C_1, C_2 > 0,$$

или иначе $\|u^+\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2 + \|u^-\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2 \leq \max\{C_1, C_2\} \|u\|_{H^1(\Omega_\gamma)}^2$.

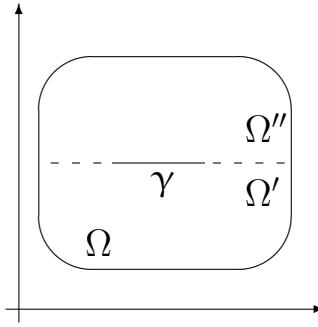


Рисунок 2.2 — Предположение о возможном разбиении области Ω

Из известного неравенства $\|u - v\|_X^2 \leq 2(\|u\|_X^2 + \|v\|_X^2)$ получаем

$$\|u^+\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2 + \|u^-\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2 \geq \frac{1}{2}\|u^+ - u^-\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2.$$

Здесь в правой части получена норма скачка функции. Таким образом, мы пришли к неравенству $\|[u]\|_{H^{1/2}(\gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega_\gamma)}$, где $C = \sqrt{2 \max\{C_1, C_2\}}$.

Это означает, что если $\{u_i\}$ является ограниченной последовательностью в $H^1(\Omega_\gamma)$, то $\{[u_i]\}$ — ограниченная последовательность в $H^{1/2}(\gamma)$.

Пространство $H^{1/2}(\gamma)$ компактно вкладывается в пространство $L_2(\gamma)$, из чего следует, что $\{[u_i]\}$ является компактной последовательностью в $L_2(\gamma)$. \square

Теорема 6. *Функционал чувствительности $\chi(\cdot)$ является слабо полунепрерывным снизу функционалом на $L_2(\gamma)$.*

Доказательство. Так как функционал $\chi(\cdot)$ выпуклый, то для доказательства теоремы достаточно показать, что он полунепрерывен снизу (в смысле сходимости по норме) в $L_2(\gamma)$. Возьмем произвольную сходящуюся последовательность $\{m_i\} \subset L_2(\gamma)$, пусть $\bar{m} = \lim_{i \rightarrow \infty} m_i$. Функционал чувствительности $\chi(\cdot)$ будет полунепрерывным снизу, если выполняются условия:

1. $\lim_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i) = +\infty$ при $\bar{m} \notin \text{dom } \chi$;
2. $\liminf_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i) \geq \chi(\bar{m})$ при $\bar{m} \in \text{dom } \chi$.

Рассмотрим поочередно оба случая. При проведении доказательства можно ограничиться последовательностью $\{m_i\}$ из эффективной области $\chi(\cdot)$, $m_i \in \text{dom } \chi$, так как вне этой области функционал принимает значение $+\infty$ и неравенство полунепрерывности снизу выполняется.

1. Пусть $\bar{m} \notin \text{dom } \chi$. Рассмотрим последовательность $\{u_{m_i}\}$, где $u_{m_i} = \operatorname{argmin}_{v \in K_{m_i}} J(v)$.

Докажем, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \|u_{m_i}\|_{H^1(\Omega_\gamma)} = +\infty$. Допустим противное: т. е. пусть у последовательности $\{u_{m_i}\}$ существует ограниченная подпоследовательность. Не

ограничивая общности, полагаем что сама последовательность $\{u_{m_i}\}$ ограничена в $H^1(\Omega_\gamma)$. В силу леммы 1 $\{[u_{m_i}]\}$ является компактной последовательностью в $L_2(\gamma)$. Пусть $t \in H_{00}^{1/2}(\gamma)$ есть слабая предельная точка этой последовательности, которую, не ограничивая общности, мы будем считать слабым пределом¹. Тогда $\{[u_{m_i}]\}$ сходится к t по норме в $L_2(\gamma)$.

Так как $m_i \rightarrow \bar{m}$ в $L_2(\gamma)$ и $u_{m_i} \rightarrow t$ в $L_2(\gamma)$, то из условия $-[u_{m_i}] \leq m_i$ следует, что $-t \leq \bar{m}$, а это означает, что $K_{\bar{m}} \neq \emptyset$ или $\bar{m} \in \text{dom } \chi$. Полученное противоречие показывает, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \|u_{m_i}\|_{H^1(\Omega_\gamma)} = +\infty$.

В силу коэрцитивности функционала $J(\cdot)$ получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} J(u_{m_i}) = +\infty.$$

2. Пусть теперь $\bar{m} \in \text{dom } \chi$. Из последовательности $\{m_i\}$ выделим подпоследовательность $\{m_j\} \subset \{m_i\}$, для которой

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \chi(m_j) = \lim_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i).$$

Как и в предыдущем пункте, рассмотрим последовательность $\{u_{m_j}\}$, где $u_{m_j} = \operatorname{argmin}_{v \in K_{m_j}} J(v)$.

Если последовательность $\{u_{m_j}\}$ не является ограниченной в $H^1(\Omega_\gamma)$, то в силу коэрцитивности функционала $J(u_{m_i}) \rightarrow +\infty$, а тогда $\lim_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i) = +\infty$ и требуемое неравенство полунепрерывности снизу выполняется.

В случае, если последовательность $\{u_{m_j}\}$ ограничена в $H^1(\Omega_\gamma)$, вновь проведем рассуждения из первого пункта доказательства и получим $-t \leq \bar{m}$.

Пусть $\tilde{u} = \operatorname{argmin}_{[v]=t \text{ на } \gamma} J(v)$. Имеем

$$\begin{aligned} J(u_{m_j}) - J(\tilde{u}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla u_{m_j}|^2 d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f u_{m_j} d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla \tilde{u}|^2 d\Omega + \int_{\Omega_\gamma} f \tilde{u} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla(\tilde{u} + (u_{m_j} - \tilde{u}))|^2 d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla \tilde{u}|^2 d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f(u_{m_j} - \tilde{u}) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega_\gamma} \nabla \tilde{u} \nabla(u_{m_j} - \tilde{u}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla(u_{m_j} - \tilde{u})|^2 d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f(u_{m_j} - \tilde{u}) d\Omega = \\ &= \langle \Theta, [u_{m_j} - \tilde{u}] \rangle + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla(u_{m_j} - \tilde{u})|^2 d\Omega, \end{aligned}$$

¹Определение пространства $H_{00}^{1/2}(\gamma)$ можно найти в [38].

где

$$\langle \Theta, [v] \rangle = \int_{\Omega_\gamma} \nabla \tilde{u} \nabla v \, d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f v \, d\Omega,$$

и при этом $\Theta \in H_{00}^{-1/2}(\gamma)$ [7; 38].

Так как $\{[u_{m_j}]\}$ слабо сходится к t в $H_{00}^{1/2}(\gamma)$, то в силу единственности слабого предела имеем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \Theta, [u_{m_j} - \tilde{u}] \rangle = 0.$$

Поэтому справедлива оценка

$$\lim_{j \rightarrow \infty} J(u_{m_j}) \geq J(\tilde{u}) \geq \chi(\bar{m})$$

и, следовательно,

$$\underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \chi(m_j) \geq \chi(\bar{m}).$$

□

2.2.3 Свойства модифицированного функционала

Двойственный функционал имеет два эквивалентных представления [51]:

$$\underline{M}(l) = \inf_{v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_\gamma)} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} \left(((l - r[v])^+)^2 - l^2 \right) ds \right\}, \quad (2.11)$$

$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_{\gamma} l m \, ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 \, ds \right\}, \quad (2.12)$$

где $\chi(\cdot)$ — определенный ранее функционал чувствительности.

Запись (2.11) используется непосредственно в алгоритмах поиска седловой точки, а запись (2.12) — в доказательстве нескольких следующих теорем.

Теорема 7. *Точка (v^*, l^*) тогда и только тогда является седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа $M(\cdot, \cdot)$, когда v^* — решение исходной задачи (2.2) и для всех $m \in L_2(\gamma)$ выполняется неравенство*

$$\chi(m) + \int_{\gamma} l^* m \, ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 \, ds \geq \chi(0).$$

Доказательство. Предположим, что (v^*, l^*) — седловая точка $M(\cdot, \cdot)$, значит, выполняется двустороннее неравенство:

$$M(v^*, l) \leq M(v^*, l^*) \leq M(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma) \times L_2(\gamma).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{l \in L_2(\gamma)} M(v^*, l) = M(v^*, l^*) = \inf_{v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)} M(v, l^*), \\ \overline{M}(v^*) = \underline{M}(l^*). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Кроме того, из определения $\overline{M}(\cdot)$ и $\underline{M}(\cdot)$ ясно, что

$$\inf_{v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)} \overline{M}(v) \geq \sup_{l \in L_2(\gamma)} \underline{M}(l). \quad (2.14)$$

Из (2.13) и (2.14) ясно, что v^* — решение (2.8), а l^* — решение (2.9). Теперь из (2.7) следует, что v^* — решение задачи (2.2). Можно записать такую цепочку равенств:

$$\underline{M}(l^*) = \overline{M}(v^*) = \chi(0),$$

это означает, что

$$\begin{aligned} \underline{M}(l^*) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_\gamma l^* m \, ds + \frac{r}{2} \int_\gamma m^2 \, ds \right\} = \chi(0), \\ \chi(m) + \int_\gamma l^* m \, ds + \frac{r}{2} \int_\gamma m^2 \, ds \geq \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\gamma). \end{aligned}$$

Теперь, наоборот, предположим, что $v^* = u$ есть решение задачи (2.2) и выполняется неравенство

$$\chi(m) + \int_\gamma l^* m \, ds + \frac{r}{2} \int_\gamma m^2 \, ds \geq \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\gamma). \quad (2.15)$$

Согласно (2.12):

$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_\gamma l m \, ds + \frac{r}{2} \int_\gamma m^2 \, ds \right\}.$$

Вместе с (2.15) это даёт

$$\underline{M}(l^*) \geq \chi(0) = \overline{M}(u).$$

Так как $\overline{M}(v) \geq \underline{M}(l)$, $\forall v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma), \forall l \in L_2(\Gamma_K)$, получаем $\underline{M}(l^*) = \overline{M}(u)$, или

$$\inf_{v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)} M(v, l^*) = \sup_{l \in L_2(\Gamma)} M(u, l).$$

Очевидно, что для $M(u, l^*)$ выполняется двойное неравенство

$$\inf_{v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)} M(v, l^*) \leq M(u, l^*) \leq \sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} M(u, l).$$

Так что получаем (по предположению $v^* = u$)

$$\inf_{v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)} M(v, l^*) = M(u, l^*) = \sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} M(v^*, l),$$

это приводит нас к неравенству седловой точки

$$M(v^*, l) \leq M(u, l^*) \leq M(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma) \times L_2(\gamma).$$

□

Теорема 8. Пусть $u \in H^2(\Omega_\gamma)$, тогда $(u, -\frac{\partial u}{\partial n})$ — седловая точка модифицированного функционала Лагранжа $M(\cdot, \cdot)$.

Доказательство. По теореме 5:

$$L(u, l) \leq L(u, -\frac{\partial u}{\partial n}) \leq L(v, -\frac{\partial u}{\partial n}) \quad \forall (v, l) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma) \times (L_2(\gamma))^+.$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} \sup_{l \in (L_2(\gamma))^+} L(u, l) &= L(u, -\frac{\partial u}{\partial n}) = \inf_{v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)} L(v, -\frac{\partial u}{\partial n}), \\ \overline{L}(u) &= L(u, -\frac{\partial u}{\partial n}) = \underline{L}(-\frac{\partial u}{\partial n}). \end{aligned}$$

Мы имеем

$$\overline{L}(u) = \sup_{l \in (L_2(\gamma))^+} \left\{ J(u) - \int_\gamma l[u] ds \right\} = J(u) = \chi(0).$$

$$\begin{aligned} L(u, -\frac{\partial u}{\partial n}) &= \inf_{v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)} L(v, -\frac{\partial u}{\partial n}) = \inf_{v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)} \inf_{m \in L_2(\gamma)} K_L(v, -\frac{\partial u}{\partial n}, m) = \\ &= \inf_m \inf_v K_L(v, -\frac{\partial u}{\partial n}, m) = \inf_m \inf_{\substack{v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma): \\ -[v] \leq m}} \left\{ J(v) + \int_\gamma (-\frac{\partial u}{\partial n}) m ds \right\} = \\ &= \inf_m \left\{ \chi(m) + \int_\gamma (-\frac{\partial u}{\partial n}) m ds \right\}. \end{aligned}$$

Из написанного следует, что

$$\chi(0) = \inf_m \left\{ \chi(m) + \int_{\gamma} \left(-\frac{\partial u}{\partial n}\right) m ds \right\}$$

или

$$\chi(m) + \int_{\gamma} \left(-\frac{\partial u}{\partial n}\right) m ds \geq \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\gamma).$$

На основании того, что

$$\chi(m) + \int_{\gamma} \left(-\frac{\partial u}{\partial n}\right) m ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 \geq \chi(m) + \int_{\gamma} \left(-\frac{\partial u}{\partial n}\right) m ds \geq \chi(0),$$

и теоремы 7 делаем вывод: $(u, -\frac{\partial u}{\partial n})$ — седловая точка модифицированного функционала Лагранжа $M(\cdot, \cdot)$. \square

Рассмотрим функционал, построенный при фиксированном $l \in L_2(\gamma)$

$$F_l(m) = \chi(m) + \int_{\gamma} l m ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 ds, \quad r > 0 — \text{const.}$$

Благодаря третьему слагаемому этот функционал является сильно выпуклым, а с учетом теоремы 6 он еще и слабо полунепрерывный в $L_2(\gamma)$.

Так как $\chi(\cdot)$ слабо полунепрерывный снизу в $L_2(\gamma)$, его надграфик $\text{epi } \chi$ есть выпуклое замкнутое множество в $L_2(\gamma) \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. По теореме отделимости существуют такие $\alpha \in L_2(\gamma)$ и $a \in \mathbb{R}$, что

$$\int_{\gamma} \alpha m ds + \chi(m) + a \geq 0 \quad \forall m \in \text{dom } \chi.$$

Следовательно, для функционала $F_l(\cdot)$ справедлива оценка

$$F_l(m) \geq - \int_{\gamma} \alpha m ds + \int_{\gamma} l m ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 ds - a \quad \forall m \in L_2(\gamma),$$

поэтому $F_l(m) \rightarrow +\infty$ при $\|m\|_{L_2(\gamma)} \rightarrow \infty$, т. е. $F_l(\cdot)$ коэрцитивен в $L_2(\gamma)$.

Из слабой полунепрерывности снизу и коэрцитивности $F_l(\cdot)$ следует существование элемента $m(l) = \underset{m \in L_2(\gamma)}{\text{argmin}} F_l(m)$. А сильная выпуклость $F_l(\cdot)$ на $\text{dom } \chi$ обеспечивает единственность элемента $m(l)$ для любого $l \in L_2(\gamma)$.

Теорема 9. Двойственный функционал $\underline{M}(\cdot)$ непрерывен в $L_2(\gamma)$.

Доказательство. Для любого $m \in L_2(\gamma)$ сильная выпуклость $F_l(\cdot)$ дает

$$\begin{aligned} \chi(m(l)) + \int_{\gamma} lm(l) ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(l) ds + \frac{r}{2} \|m - m(l)\|_{L_2(\gamma)}^2 &\leq \\ &\leq \chi(m) + \int_{\gamma} lm ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 ds. \end{aligned}$$

Возьмем два произвольных элемента $l_1, l_2 \in L_2(\gamma)$ и пусть $m_1 = m(l_1)$, $m_2 = m(l_2)$. Тогда из последнего неравенства следует

$$\begin{aligned} \chi(m_1) + \int_{\gamma} l_1 m_1 ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m_1^2 ds + \frac{r}{2} \|m_2 - m_1\|_{L_2(\gamma)}^2 &\leq \\ &\leq \chi(m_2) + \int_{\gamma} l_1 m_2 ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m_2^2 ds, \\ \chi(m_2) + \int_{\gamma} l_2 m_2 ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m_2^2 ds + \frac{r}{2} \|m_1 - m_2\|_{L_2(\gamma)}^2 &\leq \\ &\leq \chi(m_1) + \int_{\gamma} l_2 m_1 ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m_1^2 ds. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Складывая неравенства (2.16), получаем неравенство

$$r \|m_1 - m_2\|_{L_2(\gamma)}^2 \leq \int_{\gamma} (l_1 - l_2)(m_2 - m_1) ds,$$

дающее оценку

$$\|m_1 - m_2\|_{L_2(\gamma)} \leq \frac{1}{r} \|l_1 - l_2\|_{L_2(\gamma)}. \tag{2.17}$$

Из неравенств (2.16) также получается соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} l_2(m_2 - m_1) ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} (m_2^2 - m_1^2) ds &\leq \chi(m_1) - \chi(m_2) \leq \\ &\leq \int_{\gamma} l_1(m_2 - m_1) ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} (m_2^2 - m_1^2) ds. \end{aligned}$$

Перейдем в этом соотношении к пределу при $l_2 \rightarrow l_1$ в $L_2(\gamma)$. С учетом (2.17), получаем

$$\lim_{l_2 \rightarrow l_1} \chi(m_2) = \chi(m_1).$$

Отсюда делаем вывод, что функционал $\underline{M}(\cdot)$ непрерывен в $L_2(\gamma)$. □

Теорема 10. Двойственный функционал $\underline{M}(\cdot)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\gamma)$, его производная $\nabla \underline{M}(l) = \operatorname{argmin}_{m \in L_2(\gamma)} F_l(m)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $1/r$, т. е.

$$\|\nabla \underline{M}(l_1) - \nabla \underline{M}(l_2)\|_{L_2(\gamma)} \leq \frac{1}{r} \|l_1 - l_2\|_{L_2(\gamma)} \quad \forall l_1, l_2 \in L_2(\gamma).$$

Доказательство. Из непрерывности вогнутого функционала $\underline{M}(\cdot)$ следует его субдифференцируемость. Пусть $t \in \partial \underline{M}(l)$ — некоторый субдифференциал для $l \in L_2(\gamma)$. Тогда для любого $\xi \in L_2(\gamma)$ справедливо соотношение

$$\underline{M}(\xi) \leq \underline{M}(l) + (t, \xi - l)_{0, \gamma},$$

из которого получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \chi(m(\xi)) + \int_{\gamma} \xi m(\xi) ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(\xi) ds \leq \\ & \leq \chi(m(l)) + \int_{\gamma} l m(l) ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(l) ds + (t, \xi - l)_{0, \gamma} \leq \\ & \leq \chi(m(\xi)) + \int_{\gamma} l m(\xi) ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(\xi) ds + (t, \xi - l)_{0, \gamma}. \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует, что

$$\int_{\gamma} m(\xi)(\xi - l) ds \leq (t, \xi - l)_{0, \gamma} \quad \forall \xi \in L_2(\gamma).$$

Для произвольных $h \in L_2(\gamma)$ и $\beta > 0$ положим $\xi = l + \beta h$. Тогда последнее неравенство запишется в виде

$$\int_{\gamma} m(l + \beta h)h ds \leq (t, h)_{0, \gamma} \quad \forall h \in L_2(\gamma).$$

Устремляя β к нулю и учитывая (2.17), получаем

$$\int_{\gamma} m(l)h ds \leq (t, h)_{0, \gamma} \quad \forall h \in L_2(\gamma),$$

следовательно,

$$\int_{\gamma} m(l)h ds = (t, h)_{0, \gamma} \quad \forall h \in L_2(\gamma).$$

В силу единственности элемента $m(l)$ для любого $l \in L_2(\gamma)$, из полученного равенства следует, что функционал $\underline{M}(\cdot)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\gamma)$, причем $\nabla \underline{M}(l) = t = m(l)$. Неравенство (2.17) дает константу Липшица, завершая доказательство теоремы. \square

Вычисление $\underline{M}(l)$ само по себе требует решения экстремальной задачи. Но поскольку градиент функционала $\underline{M}(\cdot)$ Липшиц-непрерывен, то для решения двойственной задачи (2.9) можно использовать градиентный метод [15; 44; 47]

$$l^{k+1} = l^k + \theta_k m(l^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

с любым начальным $l^0 \in L_2(\gamma)$, шагом $\theta_k \in [\beta, 2r - \beta]$, при $\beta \in (0, r]$ и градиентом $m(l^k) = \nabla \underline{M}(l^k) = \operatorname{argmin}_{m \in L_2(\gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_{\gamma} l^k m \, ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 \, ds \right\}$.

Теорема 11. Для алгоритма (2.18) выполняется предельное равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|m(l^k)\|_{L_2(\gamma)} = 0.$$

Доказательство. Функция $\underline{M}(\cdot)$ ограничена сверху величиной $\chi(0)$, принимающей конечное значение в случае разрешимости исходной задачи. Из теоремы 10 следует, что для $\underline{M}(\cdot)$ выполняется равенство

$$\underline{M}(l + h) - \underline{M}(l) = \int_0^1 \langle m(l + th), h \rangle \, dt,$$

поэтому можно построить доказательство аналогично [47, с. 31]. \square

Алгоритм (2.18) переписывается следующим образом [51]:

$$\begin{aligned} (i) \quad u^{k+1} &= \operatorname{argmin}_{v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} \left(((l^k - r[v])^+)^2 - (l^k)^2 \right) ds \right\} \\ (ii) \quad l^{k+1} &= l^k + \theta_k \max \left\{ -[u]^{k+1}, -\frac{l^k}{r} \right\}, \\ & l^0 \in L_2(\gamma), \quad \theta_k \in [\beta, 2r - \beta], \quad \beta \in (0, r]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Можно показать, что при условии разрешимости задачи (2.12) алгоритм (2.19) дает сходимость по функционалу $J(\cdot)$, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u^k) = \min_{v \in K} J(v) = J(u^*),$$

здесь u^* — решение задачи (2.2).

С одной стороны, слабая полунепрерывность $\chi(\cdot)$ обеспечивает выполнение неравенства

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left\{ \chi(m(l^k)) + \int_{\gamma} l^k m(l^k) ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(l^k) ds \right\} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \chi(m(l^k)) \geq \chi(0) = J(u^*).$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \underline{M}(l^k) &= \chi(m(l^k)) + \int_{\gamma} l^k m(l^k) ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(l^k) ds = \\ &= \inf_{m \in L_2(\gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_{\gamma} l^k m ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 ds \right\} \leq \chi(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Откуда получается неравенство

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \chi(m(l^k)) + \int_{\gamma} l^k m(l^k) ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(l^k) ds \right\} \leq \chi(0).$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \chi(m(l^k)) + \int_{\gamma} l^k m(l^k) ds + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(l^k) ds \right\} = \chi(0) = J(u^*).$$

Из теоремы 11 теперь следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \chi(m(l^k)) = \chi(0) = J(u^*).$$

В предположении, что решение исходной задачи $u^* \in H^2(\Omega_{\gamma})$ можно доказать [15], что метод (2.19) сходится к седловой точке $(u^*, l^*) \in H^1_{\Gamma}(\Omega_{\gamma}) \times L_2(\gamma)$ функционала Лагранжа.

2.3 Численное решение модельной задачи с трещиной

Пусть $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ — единичный квадрат, $\gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: 0.2 < x_1 < 0.8, x_2 = 0.4\}$ — прямолинейный отрезок, параллельный оси Ox_1 . Найдем решение для трёх случаев распределения силы f , представленных на рисунке 2.3.

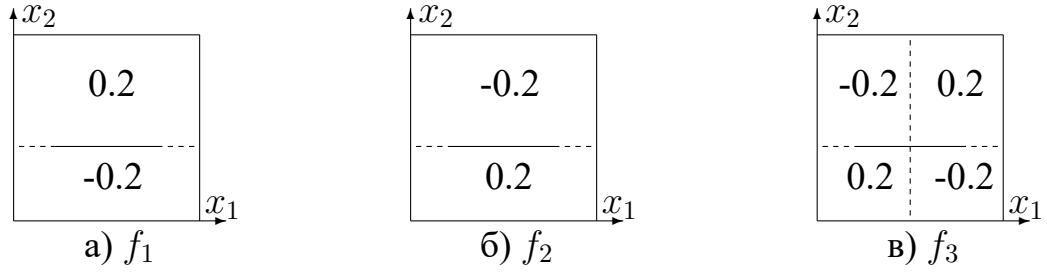


Рисунок 2.3 — Различные значения функции f для задачи с трещиной

2.3.1 Аппроксимация и алгоритм поиска седловой точки

Дискретизацию осуществим тем же способом, что был применен в разделе 1.3.2. Введем обозначения: T_h — триангуляция с шагом h ; I — множество индексов всех узлов; I_Γ — индексы узлов, попавших на внешнюю границу Γ ; I_γ — индексы внутренних узлов трещины γ ; $I_\Omega = (I \setminus I_\Gamma) \setminus I_\gamma$ — индексы внутренних узлов области Ω_γ .

Как и ранее, используем в конечных элементах базисные функции φ_i (1.15). Каждому узлу с индексом из I_γ соответствуют два усеченных конечных элемента и, соответственно, усеченные базисные функции, которые обозначим φ_i^+ и φ_i^- ($i \in I_\gamma$). Построим линейную оболочку на этих функциях:

$$V_h = \{v_h: v_h = \sum_{k \in I_\Omega} v_k \cdot \varphi_k + \sum_{k \in I_\gamma} v_k^+ \cdot \varphi_k^+ + \sum_{k \in I_\gamma} v_k^- \cdot \varphi_k^-, \quad v_k, v_k^+, v_k^- \in \mathbb{R}\}.$$

Так как суммирование ведется по узлам, лежащим строго в Ω , то выполняется включение $V_h \subset H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)$. Для аппроксимации множества $L_2(\gamma)$ построим линейную оболочку

$$L_{2,h} = \{l_h: l_h = \sum_{i \in I_\gamma} l_i \overline{\varphi}_i, l_i \in \mathbb{R}\},$$

$$\text{где } \overline{\varphi}_i = \begin{cases} 1 + \frac{x-x_i}{h}, & x \in [x_i - h, x_i], \\ 1 + \frac{x_i-x}{h}, & x \in [x_i, x_i + h]. \end{cases}$$

Выполним замену переменных: $t_i = [v_i] = v_i^+ - v_i^-$. Тогда $v_i^+ = v_i^- + t_i$. Аппроксимировав интеграл $\frac{1}{2r} \int_\gamma (((l - rt)^+)^2 - l^2) ds$ по формуле трапеций, получаем $\frac{h}{2r} \sum_{i \in I_\gamma} (((l_i - rt_i)^+)^2 - l_i^2)$. С учетом этого, подставим функцию v_h в модифициро-

ванный функционал Лагранжа $M(\cdot, \cdot)$ и получим его конечномерный аналог

$$\begin{aligned}
M_h(v_h, l_h) = & \frac{1}{2} \left(\sum_{i \in I_\Omega} \sum_{j \in I_\Omega} a_{ij} v_i v_j + \sum_{i \in I_\gamma} \sum_{j \in I_\gamma} a_{ij}^+ (v_i^- + t_i) (v_j^- + t_j) + \sum_{i \in I_\gamma} \sum_{j \in I_\gamma} a_{ij}^- v_i^- v_j^- + \right. \\
& \left. + 2 \sum_{i \in I_\Omega} \sum_{j \in I_\gamma} b_{ij}^+ v_i (v_j^- + t_j) + 2 \sum_{i \in I_\Omega} \sum_{j \in I_\gamma} b_{ij}^- v_i v_j^- \right) - \\
& - \sum_{i \in I_\Omega} f_i v_i - \sum_{i \in I_\gamma} f_i^+ (v_i^- + t_i) - \sum_{i \in I_\gamma} f_i^- v_i^- + \frac{h}{2r} \sum_{i \in I_\gamma} ((l_i - r t_i)^+)^2 - l_i^2,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \int_{\Omega_\gamma} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx, \quad i, j \in I_\Omega, \quad f_i = \int_{\Omega_\gamma} f \cdot \nabla \varphi_i dx, \quad i \in I_\Omega, \\
a_{ij}^+ &= \int_{\Omega_\gamma} \nabla \varphi_i^+ \nabla \varphi_j^+ dx, \quad a_{ij}^- = \int_{\Omega_\gamma} \nabla \varphi_i^- \nabla \varphi_j^- dx, \quad i, j \in I_\gamma, \\
b_{ij}^+ &= \int_{\Omega_\gamma} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j^+ dx, \quad b_{ij}^- = \int_{\Omega_\gamma} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j^- dx, \quad i \in I_\Omega, j \in I_\gamma, \\
f_i^+ &= \int_{\Omega_\gamma} f \cdot \nabla \varphi_i^+ dx, \quad f_i^- = \int_{\Omega_\gamma} f \cdot \nabla \varphi_i^- dx, \quad i \in I_\gamma.
\end{aligned}$$

Алгоритм поиска седловой точки (2.19) реализуем в виде вложенных циклов. Во внутреннем осуществляется шаг (i), на котором отыскивается минимум функционала Лагранжа на всем множестве V_h при фиксированном l^k . Используем для этого метод покоординатного спуска, для которого критерием остановки счета установим условие: $\max_i |u_i^{k+1} - u_i^k| \leq 10^{-2} \cdot \varepsilon \cdot h$. Во внешнем цикле осуществляется шаг (ii), где происходит уточнение двойственной переменной.

1 repeat

$$\begin{array}{l}
\mathbf{2} \quad \left| \begin{array}{l} u^{k+1} = \operatorname{argmin}_{v_h \in V_h} M_h(v_h, l^k); \\ l^{k+1} = l^k + r \max \left\{ t^{k+1}, -\frac{l^k}{r} \right\}; \end{array} \right. \\
\mathbf{3} \quad \left| \right.
\end{array}$$

4 until $\max_i |l_i^{k+1} - l_i^k| \leq \varepsilon \cdot h;$

Алгоритм 2: Задача о теле с трещиной.

2.3.2 Результаты вычислительных экспериментов

На рисунке 2.4 изображены решения задачи при $\varepsilon = 10^{-4}$ для разных функций f (рисунок 2.3).

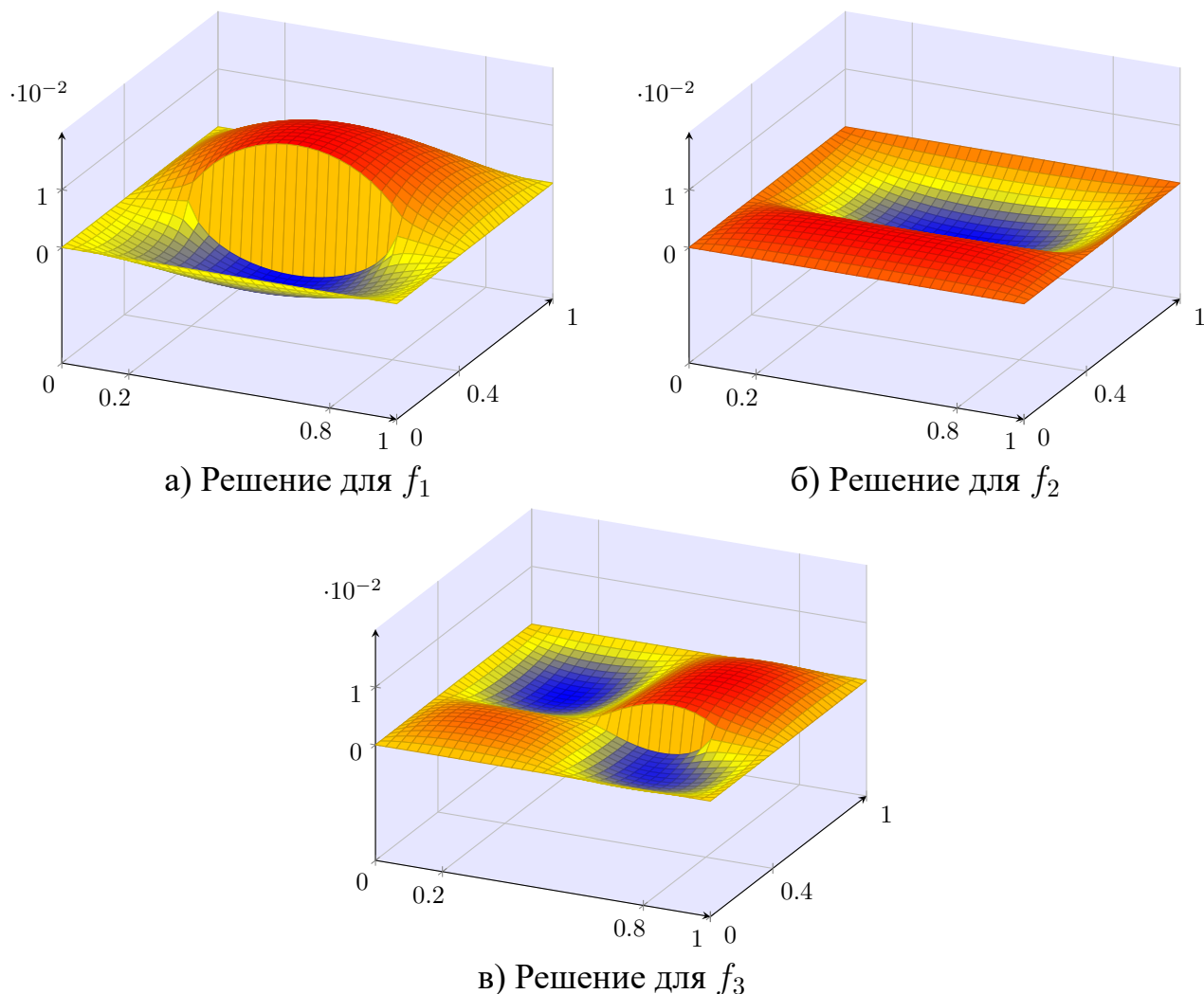


Рисунок 2.4 — Решения задачи для разных значений f ($h = 1/32$)

В первом варианте берега трещины полностью расходятся (рисунок 2.4а), а это значит, что двойственная переменная, соответствующая значению скачка производной по нормали на γ , равна нулю во всех точках γ . Так как изначально для двойственной переменной l взята нулевая функция, то совершается лишь одна итерация внешнего цикла.

Для второго примера ограничения задачи не позволяют берегам разойтись (рисунок 2.4б), так что скачок функции u на γ равен нулю, при этом двойственная переменная принимает ненулевые значения.

Третий вариант более интересен, поскольку здесь есть участок границы γ , на котором берега трещины разошлись, и есть участок, на котором они остались слипшимися (рисунок 2.4в).

Приведем результаты расчетов при шаге триангуляции $h = 1/64$ и точности $\varepsilon = 10^{-4}$ для разных функций f (таблица 2) при $r \in \{1, 10, 10^2, 10^3, 10^4\}$.

Таблица 2 — Относительная сложность решаемых задач

r	f	Внутренние итерации	Внешние итерации	Время (мс)
1	f_1	3386	1	1014
	f_2	23374	286	6881
	f_3	17114	275	5169
10	f_1	3386	1	1014
	f_2	6723	48	1925
	f_3	5164	47	1526
10^2	f_1	3386	1	1014
	f_2	3726	11	1061
	f_3	2806	10	867
10^3	f_1	3386	1	1014
	f_2	3044	5	877
	f_3	2245	5	673
10^4	f_1	3386	1	1014
	f_2	2851	3	822
	f_3	2096	3	667

Как видно, в первом примере всегда совершается одна внешняя итерация, так как во всех узлах из I_γ скачок функции строго больше нуля, следовательно, двойственная переменная будет равна нулю (а это уже стартовое значение в численной реализации).

По второму и третьему примеру видно, что увеличение параметра r приводит к увеличению скорости сходимости как по двойственной переменной, так и по прямой. Для третьего примера проведена серия расчетов при большем количестве различных r (рисунки 2.5, 2.6, масштаб логарифмический).

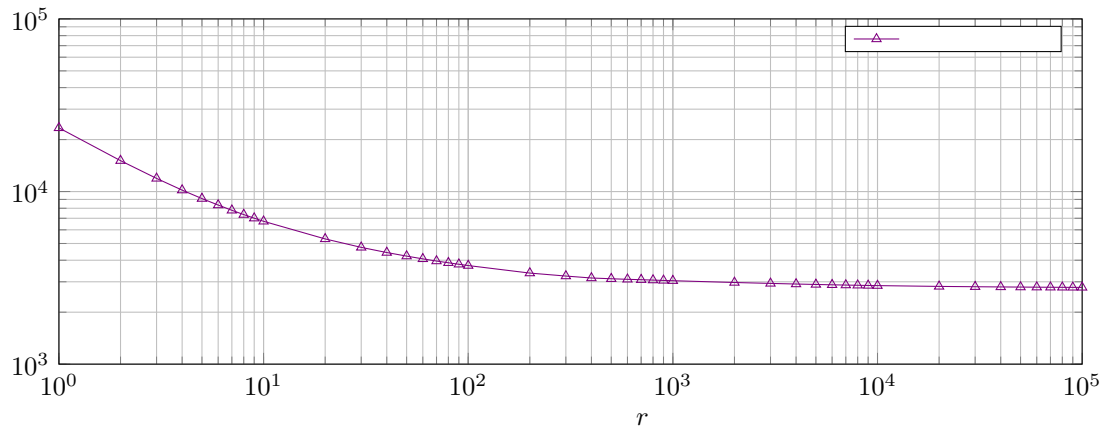


Рисунок 2.5 — Зависимость числа внутренних итераций от параметра r

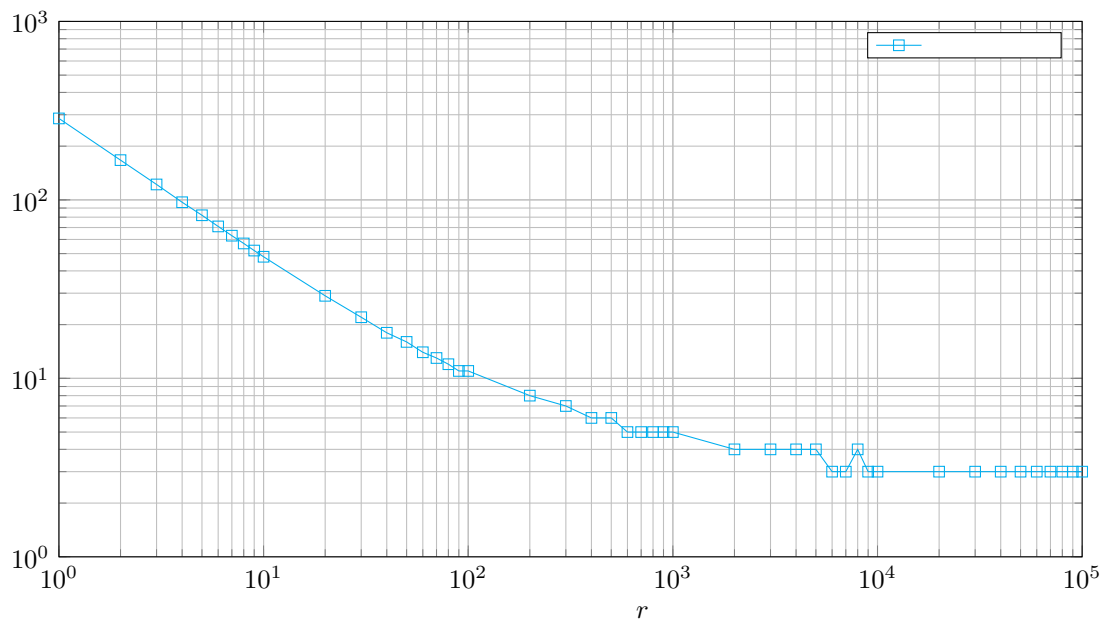


Рисунок 2.6 — Зависимость числа внешних итераций от параметра r

Глава 3. Устойчивый метод решения полуконтактной задачи для двух упругих тел

Цель главы — исследование возможности применения модифицированных функционалов Лагранжа для решения задачи о контакте двух тел. В отличие от задачи, рассмотренной в предыдущей главе, это задача в перемещениях и с коэффициентами, учитывающими физические характеристики материалов тел.

Исследование подобных задач можно найти в [73—77]. При их решении используются разные итерационные алгоритмы, например, метод Шварца [78], другие методы декомпозиции [79; 80], метод псевдосреды [81], штрафных функций, множителей Лагранжа, комбинированный метод штрафов и Лагранжа. Обширный обзор контактных алгоритмов можно найти в [82].

Обычно рассматривается коэргитивный случай, когда оба тела имеют закрепление. Мы же рассмотрим более сложную постановку, когда одно из тел имеет одну степень свободы. Для такого случая нельзя доказать сходимость классических методов двойственности к седловой точке. Для исследования задачи строится схема двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа (раздел 3.2).

В разделе 3.3 для построения устойчивого алгоритма описывается применение итеративной проксимальной регуляризации, а в разделе 3.4 ставится задача, учитывающая трение в зоне контакта, для демонстрации преимуществ, которые дает решение двойственной задачи. Все численные эксперименты, осуществленные для задач из этой главы, приведены в разделе 3.5.

3.1 Постановка задачи

Два плоских упругих тела занимают в недеформированном состоянии области $\Omega', \Omega'' \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевыми границами¹. Границы областей разбиты на участки:

$$\partial\Omega' = \overline{\Gamma}_u \cup \overline{\Gamma}'_\tau \cup \Gamma_K, \quad \partial\Omega'' = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}''_\tau \cup \Gamma_K,$$

причем $\text{mes } \Gamma_u > 0$, $\text{mes } \Gamma_K > 0$ и зона контакта Γ_K не расширяется (рисунок 3.1).

¹Величины, относящиеся к телу Ω' , в дальнейшем помечаются индексом $'$, а к телу Ω'' — индексом $''$.

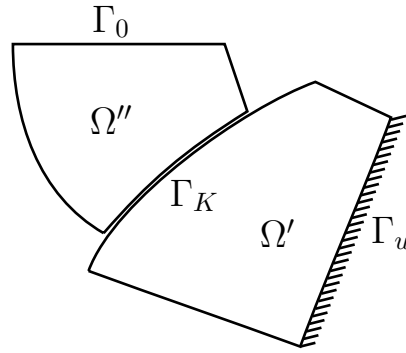


Рисунок 3.1 — Контакт двух тел

Предполагается, что силы трения между телами равны нулю. Под действием объемных сил F и поверхностных сил P может происходить перемещение и деформация тел. Смещение каждой точки показывается вектором перемещений: $u = (u_1, u_2)$, $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$. Изменение формы в каждой точке тела характеризуется тензором деформации. Для сплошных сред это симметричный тензор второго порядка. При малых u его компоненты вычисляются по формуле

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2.$$

Физические свойства тел характеризуются модулем упругости E (модуль Юнга) и коэффициентом Пуассона μ [3, с. 103]. В плоском случае для упрощения записей используются коэффициенты [83, с. 74]

$$\mu_1 = \frac{\mu}{1 - \mu}, \quad E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2}.$$

С ними коэффициенты тензора напряжений вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(u) &= \frac{E_1}{1 - \mu_1^2} (\varepsilon_{11}(u) + \mu_1 \varepsilon_{22}(u)), \\ \sigma_{22}(u) &= \frac{E_1}{1 - \mu_1^2} (\mu_1 \varepsilon_{11}(u) + \varepsilon_{22}(u)), \\ \sigma_{12}(u) &= \sigma_{21}(u) = \frac{E_1}{2(1 + \mu_1)} \varepsilon_{12}(u). \end{aligned}$$

В общем же виде связь между σ и ε задается формулой

$$\sigma_{ij}(u) = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u), \quad i, j = 1, 2,$$

где по повторяющимся индексам ведется суммирование по 1, 2. Компоненты тензора упругости c_{ijkl} обладают обычными свойствами симметрии: $c_{ijkl} = c_{jikl} =$

c_{kmij} , и существует такая положительная константа c_0 , что всюду в $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$

$$c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \geq c_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}.$$

В областях Ω' , Ω'' напряжения должны компенсировать воздействие объемных сил, что отражает статическое уравнение равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{i1}(u')}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}(u')}{\partial x_2} + F'_i &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{i1}(u'')}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}(u'')}{\partial x_2} + F''_i &= 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

С использованием правила суммирования по повторяющимся индексам это можно записать короче:

$$\sigma_{ij,j}^\alpha(u) + F_i^\alpha = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad \alpha = ', '' . \quad (3.1)$$

На части границы действуют поверхностные силы:

$$\sigma_{ij}^\alpha(u)n_j^\alpha = P_i^\alpha \text{ на } \Gamma_\tau^\alpha, \quad \alpha = ', '' , \quad i, j = 1, 2, \quad (3.2)$$

где $n^\alpha = (n_1^\alpha, n_2^\alpha)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega^\alpha$.

Тело Ω' закреплено на части границы

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_u \subset \partial\Omega'. \quad (3.3)$$

Для тела Ω'' на части границы выполняется условие Дирихле:

$$u_n = u_i n_i = 0 \text{ на } \Gamma_0 \subset \partial\Omega''. \quad (3.4)$$

В зоне контакта выполняются условия взаимного непроникновения

$$u'_n + u''_n \leq 0, \quad \sigma'_n(u) = \sigma''_n(u) \leq 0, \quad (3.5)$$

$$(u'_n + u''_n)\sigma'_n(u) = 0, \quad (3.6)$$

$$\sigma'_\tau(u) = \sigma''_\tau(u) = 0, \quad (3.7)$$

где $u'_n = u'_i n'_i$, $u''_n = u''_i n''_i$. Нормальная составляющая тензора напряжений $\sigma_n^\alpha(u) = \sigma(u^\alpha) n_i^\alpha n_j^\alpha$, тангенциальная составляющая $\sigma_\tau^\alpha(u) = \sigma_{ij}^\alpha(u^\alpha) n_j^\alpha - \sigma_n^\alpha(u) n_i^2$. Иногда для краткости будем использовать обозначение $\sigma = \sigma(u)$.

²В дальнейшем индексы n и τ у величин означают их нормальную и касательную составляющие, причем в зоне контакта соответствующие векторы тел противоположно направлены: $n' = -n''$, $\tau' = -\tau''$.

Соотношения (3.1)–(3.7) представляют собой краевую постановку задачи. Функция u , удовлетворяющая этим условиям, называется классическим решением задачи.

Можно придать этой задаче вариационную форму на основе принципа минимума потенциальной энергии. Для этого нужно определить пространство функций перемещений

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \{v: v = (v', v'') \in [H^1(\Omega')]^2 \times [H^1(\Omega'')]^2\},$$

пространство возможных перемещений

$$V = \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega): v' = 0 \text{ на } \Gamma_u, v''_n = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

множество допустимых перемещений

$$K = \{v \in V: v'_n + v''_n \leq 0 \text{ на } \Gamma_K\}.$$

Для компактности записей введем обозначение для билинейной, симметричной, неотрицательно определенной формы

$$A(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) d\Omega,$$

линейной формы

$$FP(v) = \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\tau}} P_i v_i ds, \quad \Gamma_{\tau} = \Gamma'_{\tau} \cup \Gamma''_{\tau},$$

для скалярного произведения $(x, y)_{H^k(X)}$ и нормы $\|x\|_{H^k(X)}$ будем использовать соответственно обозначения $(x, y)_{k, X}$ и $\|x\|_{k, X}$.

Вторая формулировка модели записывается в виде задачи минимизации функционала потенциальной энергии на множестве K

$$\mathcal{L}(v) = \frac{1}{2} A(v, v) - FP(v) \rightarrow \min_{v \in K}, \quad (3.8)$$

третья — в виде вариационного неравенства: найти такое u , что

$$A(u, v - u) - FP(v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K. \quad (3.9)$$

Можно показать, что задачи (3.8) и (3.9) эквивалентны. Их решение называется слабым (вариационным) решением задачи (3.1)–(3.7).

Можно показать, что каждое классическое решение является слабым. А если слабое решение является достаточно гладким, то оно будет и классическим [7].

Если одно из тел зафиксировано (условие (3.3)), то пространство жестких перемещений трехмерное

$$R = \{z \in \mathcal{H}^1(\Omega) : z = (z', z''), z' = 0, z_1'' = a_1'' - b'' x_2, z_2'' = a_2'' + b'' x_1\}, \quad (3.10)$$

где $a_1'', a_2'', b'' \in \mathbb{R}^1$. Оно является ядром билинейной формы $A(\cdot, \cdot)$.

Для доказательства сходимости метода двойственности потребуется коэрцитивность функционала потенциальной энергии $\mathcal{L}(\cdot)$ на множестве допустимых функций K . Необходимые для этого условия приводятся в теореме 2.4 из [7, с. 127]. Их выполнение гарантирует существование и единственность решения. Далее предполагаем, что условия этой теоремы выполнены (но, возможно, при этом $K \cap R \neq \{0\}$).

3.2 Модифицированная схема двойственности

В случае, когда $K \cap R \neq \{0\}$, ядро билинейной формы $A(\cdot, \cdot)$ не тривиально (тело Ω'' имеет одну степень свободы), поэтому нельзя доказать сходимость классических методов двойственности к седловой точке.

С целью решения задачи (3.8) мы применяем модифицированные функционалы Лагранжа. Этот метод двойственности позволяет снять ограничение $v_n' + v_n'' \leq 0$ и вместо минимизации функционала $\mathcal{L}(\cdot)$ на K в задаче (3.8) проводить минимизацию на более широком пространстве V .

3.2.1 Определение модифицированного функционала Лагранжа

Обозначим $K_m = \{v \in V : (v_n' + v_n'') \leq m \text{ на } \Gamma_K\}$. Если функция $m \in L_2(\Gamma_K)$ ограничена снизу на Γ_K , то соответствующее ей множество K_m не является пустым. Оно может быть пустым, если $m \in L_2(\Gamma_K) \setminus \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma_K)$ и не ограничена снизу на Γ_K [15].

Определим вспомогательный функционал $K_L(\cdot, \cdot, \cdot)$ соотношением

$$K_L(v, l, m) = \begin{cases} \mathcal{L}(v) + \int_{\Gamma_K} lm \, ds, & \text{если } K_m \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{если } K_m = \emptyset. \end{cases}$$

Тогда для $l \in (L_2(\Gamma_K))^+$ классический функционал Лагранжа можно сформировать следующим образом:

$$L(v, l) = \inf_{m \in L_2(\Gamma_K)} K_L(v, l, m) = \mathcal{L}(v) + \int_{\Gamma_K} l(v'_n + v''_n) \, ds.$$

Теорема 12. Если решение u задачи (3.8) принадлежит пространству $\mathcal{H}^2(\Omega)$, то классический функционал Лагранжа $L(\cdot, \cdot)$ обладает седловой точкой $(u, -\sigma'_n(u))$ на $V \times (L_2(\Gamma_K))^+$, т. е.:

$$L(u, l) \leq L(u, -\sigma'_n(u)) \leq L(v, -\sigma'_n(u)) \quad \forall (v, l) \in V \times (L_2(\Gamma_K))^+.$$

Доказательство. Так как $(u'_n + u''_n) \leq 0$, $\sigma'_n \leq 0$, $(u'_n + u''_n)\sigma_n = 0$, получаем левую часть неравенства седловой точки

$$\begin{aligned} L(u, l) &= \frac{1}{2}A(u, u) - FP(u) + \int_{\Gamma_K} l(u'_n + u''_n) \, ds \leq \frac{1}{2}A(u, u) - FP(u) = \\ &= \frac{1}{2}A(u, u) - FP(u) + \int_{\Gamma_K} (-\sigma'_n)(u'_n + u''_n) \, ds = L(u, -\sigma'_n). \end{aligned}$$

Чтобы показать выполнение правой части неравенства седловой точки, покажем неотрицательность разности

$$\begin{aligned} L(v, -\sigma'_n) - L(u, -\sigma'_n) &= \mathcal{L}(v) - \mathcal{L}(u) + \int_{\Gamma_K} (-\sigma'_n)((v'_n + v''_n) - (u'_n + u''_n)) \, ds = \\ &= \int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v - u) \, d\Omega - \int_{\Omega} F_i(v_i - u_i) \, d\Omega - \int_{\Gamma_K} P_i(v_i - u_i) \, ds - \\ &- \int_{\Gamma_K} \sigma'_n((v'_n + v''_n) - (u'_n + u''_n)) \, ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{ij}(v - u) \varepsilon_{kl}(v - u) \, d\Omega. \end{aligned}$$

Здесь первые четыре слагаемых в сумме дают ноль, а пятое слагаемое неотрицательно. Таким образом, $(u, -\sigma'_n)$ — седловая точка классического функционала Лагранжа. \square

Теперь определим функционал $K_M(\cdot, \cdot, \cdot)$

$$K_M(v, l, m) = \begin{cases} \mathcal{L}(v) + \int_{\Gamma_K} lm \, ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 \, ds, & \text{если } K_m \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{если } K_m = \emptyset, \end{cases}$$

и построим модифицированный функционал Лагранжа

$$\begin{aligned} M(v, l) &= \inf_{m \in L_2(\Gamma_K)} K(v, l, m) = \inf_{\substack{m \in L_2(\Gamma_K): \\ (v'_n + v''_n) \leq m}} \left\{ \mathcal{L}(v) + \int_{\Gamma_K} (lm + \frac{r}{2}m^2) \, ds \right\} = \\ &= \mathcal{L}(v) + \frac{1}{2r} \inf_{\substack{m \in L_2(\Gamma_K): \\ (v'_n + v''_n) \leq m}} \int_{\Gamma_K} ((l + rm)^2 - l^2) \, ds = \\ &= \mathcal{L}(v) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left(((l + r(v'_n + v''_n))^+)^2 - l^2 \right) \, ds, \end{aligned}$$

где $r = \text{const} > 0$, $(l + r(v'_n + v''_n))^+ = \max\{0, l + r(v'_n + v''_n)\}$.

Определение 3. Пара $(v^*, l^*) \in V \times L_2(\Gamma_K)$ называется седловой точкой функционала $M(\cdot, \cdot)$, если выполняется двустороннее неравенство

$$M(v^*, l) \leq M(v^*, l^*) \leq M(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in V \times L_2(\Gamma_K).$$

Введем функционалы:

$$\begin{aligned} \underline{M}(l) &= \inf_{v \in V} M(v, l), \\ \overline{M}(v) &= \sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} M(v, l). \end{aligned}$$

Если $v \in K$, то выполняется условие $(v'_n + v''_n) \leq 0$ на Γ_K . Тогда $K_M(v, l, 0) = \mathcal{L}(v)$ для всех $l \in L_2(\Gamma_K)$, и, следовательно, можно точно сказать, что

$$M(v, l) = \inf_{m \in L_2(\Gamma_K)} K_M(v, l, m) \leq \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in K.$$

Так что получаем

$$\overline{M}(v) = \sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} M(v, l) \leq \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in K. \quad (3.11)$$

Если $(v'_n + v''_n) \leq m$, то

$$K_M(v, 0, m) = \mathcal{L}(v) + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 \, ds.$$

Поэтому для всех $v \in V$ будет верно следующее:

$$\begin{aligned} M(v,0) &= \inf_{m \in L_2(\Gamma_K)} K_M(v,0,m) = \inf_{\substack{m \in L_2(\Gamma_K): \\ (v'_n + v''_n) \leq m}} \left\{ \mathcal{L}(v) + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 ds \right\} = \\ &= \mathcal{L}(v) + \frac{r}{2} \inf_{\substack{m \in L_2(\Gamma_K): \\ (v'_n + v''_n) \leq m}} \int_{\Gamma_K} m^2 ds \geq \mathcal{L}(v). \end{aligned}$$

И теперь получаем

$$\overline{M}(v) = \sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} M(v,l) \geq M(v,0) \geq \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in V. \quad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) следует, что

$$\overline{M}(v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in K. \quad (3.13)$$

Очевидно, что $K_M(v,l,m) \geq K_L(v,l,m)$, и, следовательно,

$$M(v,l) \geq L(v,l) \quad \forall l \in (L_2(\Gamma_K))^+.$$

Тогда $\overline{M}(v) \geq \overline{L}(v)$, где $\overline{L}(v) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma_K))^+} L(v,l)$.

Если $v \notin K$, то

$$\overline{L}(v) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma_K))^+} L(v,l) = +\infty \quad (3.14)$$

Из (3.13) и (3.14) следует, что

$$\overline{M}(v) = \begin{cases} \mathcal{L}(v), & \text{если } v \in K, \\ +\infty, & \text{если } v \notin K. \end{cases} \quad (3.15)$$

Поэтому, используя модифицированный функционал Лагранжа, можно исходную задачу представить в виде

$$\overline{M}(v) \rightarrow \min_{v \in V}, \quad (3.16)$$

а двойственную — в виде

$$\underline{M}(l) \rightarrow \max_{l \in L_2(\Gamma_K)}. \quad (3.17)$$

3.2.2 Функционал чувствительности

На $L_2(\Gamma_K)$ определим функционал чувствительности

$$\chi(m) = \begin{cases} \inf_{v \in K_m} \mathcal{L}(v), & \text{если } K_m \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{если } K_m = \emptyset. \end{cases}$$

Этот функционал является выпуклым на $\text{dom } \chi$. По определению $\chi(0) = \inf_{v \in K} \mathcal{L}(v)$.

Теорема 13. *Функционал чувствительности $\chi(\cdot)$ является слабо полунепрерывным снизу функционалом на $L_2(\Gamma_K)$.*

Доказательство. По аналогии с [101; 15]. □

Функционал $\underline{M}(\cdot)$ имеет два представления [51]:

$$\underline{M}(l) = \inf_{v \in V} \left\{ \mathcal{L}(v) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left((l + r(v'_n + v''_n))^+ \right)^2 - l^2 ds \right\}, \quad (3.18)$$

$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L_2(\Gamma_K)} \left\{ \chi(m) + \int_{\Gamma_K} lm ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 ds \right\}. \quad (3.19)$$

Первое используется непосредственно в алгоритме поиска седловой точки, а второе необходимо для доказательства представленных далее теорем.

Теорема 14. *Точка (v^*, l^*) тогда и только тогда является седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа $M(\cdot, \cdot)$, когда v^* — решение исходной задачи (3.8) и для всех $m \in L_2(\Gamma_K)$ выполняется неравенство*

$$\chi(m) + \int_{\Gamma_K} l^* m ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 ds \geq \chi(0).$$

Доказательство. Предположим, что (v^*, l^*) — седловая точка $M(\cdot, \cdot)$, это значит, что выполняется двустороннее неравенство:

$$M(v^*, l) \leq M(v^*, l^*) \leq M(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in V \times L_2(\Gamma_K).$$

Тогда

$$\sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} M(v^*, l) = M(v^*, l^*) = \inf_{v \in V} M(v, l^*),$$

$$\overline{M}(v^*) = \underline{M}(l^*). \quad (3.20)$$

Кроме того, из определения $\overline{M}(\cdot)$ и $\underline{M}(\cdot)$ ясно, что

$$\inf_{v \in V} \overline{M}(v) \geq \sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} \underline{M}(l). \quad (3.21)$$

Из (3.20) и (3.21) следует, что v^* — решение (3.16), а l^* — решение (3.17). Из (3.15) следует, что v^* — решение задачи (3.8). Можно записать такую цепочку равенств:

$$\underline{M}(l^*) = \overline{M}(v^*) = \chi(0),$$

она означает, что

$$\underline{M}(l^*) = \inf_{m \in L_2(\Gamma_K)} \left\{ \chi(m) + \int_{\Gamma_K} l^* m \, ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 \, ds \right\} = \chi(0),$$

$$\chi(m) + \int_{\Gamma_K} l^* m \, ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 \, ds \geq \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\Gamma_K).$$

Теперь, наоборот, предположим, что $v^* = u$ есть решение задачи (3.8) и выполняется неравенство

$$\chi(m) + \int_{\Gamma_K} l^* m \, ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 \, ds \geq \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\Gamma_K). \quad (3.22)$$

Согласно (3.19):

$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L_2(\Gamma_K)} \left\{ \chi(m) + \int_{\Gamma_K} l m \, ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 \, ds \right\}.$$

Вместе с (3.22) это даёт

$$\underline{M}(l^*) \geq \chi(0) = \overline{M}(u).$$

Так как $\overline{M}(v) \geq \underline{M}(l)$, $\forall v \in V, \forall l \in L_2(\Gamma_K)$, то получаем $\underline{M}(l^*) = \overline{M}(u)$, или

$$\inf_{v \in V} M(v, l^*) = \sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} M(u, l).$$

Очевидно, что для $M(u, l^*)$ выполняется двойное неравенство

$$\inf_{v \in V} M(v, l^*) \leq M(u, l^*) \leq \sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} M(u, l),$$

так что получаем (по предположению $v^* = u$)

$$\inf_{v \in V} M(v, l^*) = M(u, l^*) = \sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} M(v^*, l),$$

а это приводит к неравенству седловой точки

$$M(v^*, l) \leq M(u, l^*) \leq M(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in V \times L_2(\Gamma_K).$$

□

Теорема 15. Пусть $u \in \mathcal{H}^2(\Omega)$. Тогда $(u, -\sigma'_n(u))$ — седловая точка модифицированного функционала Лагранжа $M(\cdot, \cdot)$.

Доказательство. По теореме 12

$$L(u, l) \leq L(u, -\sigma'_n) \leq L(v, -\sigma'_n) \quad \forall (v, l) \in V \times (L_2(\Gamma_K))^+.$$

Это означает, что

$$\sup_{l \in (L_2(\Gamma_K))^+} L(u, l) = L(u, -\sigma'_n) = \inf_{v \in V} L(v, -\sigma'_n) \quad \forall (v, l) \in V \times (L_2(\Gamma_K))^+.$$

$$\bar{L}(u) = L(u, -\sigma'_n) = \underline{L}(-\sigma'_n).$$

Теперь

$$\bar{L}(u) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma_K))^+} \left\{ \mathcal{L}(u) + \int_{\Gamma_K} l(u'_n + u''_n) ds \right\} = \mathcal{L}(u) = \chi(0),$$

$$\begin{aligned} L(u, -\sigma'_n) &= \inf_{v \in V} L(v, -\sigma'_n) = \inf_{v \in V} \inf_{m \in L_2(\Gamma_K)} K_L(v, -\sigma'_n, m) = \\ &= \inf_m \inf_v K_L(v, -\sigma'_n, m) = \inf_m \inf_{\substack{v \in V: \\ (v'_n + v''_n) \leq m}} \left\{ \mathcal{L}(v) + \int_{\Gamma_K} (-\sigma'_n) m ds \right\} = \\ &= \inf_m \left\{ \chi(m) + \int_{\Gamma_K} (-\sigma'_n) m ds \right\}. \end{aligned}$$

Из написанного следует, что

$$\chi(0) = \inf_m \left\{ \chi(m) + \int_{\Gamma_K} (-\sigma'_n) m ds \right\}$$

или

$$\chi(m) + \int_{\Gamma_K} (-\sigma'_n) m ds \geq \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\Gamma_K).$$

На основании того, что

$$\chi(m) + \int_{\Gamma_K} (-\sigma'_n) m ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 \geq \chi(m) + \int_{\Gamma_K} (-\sigma'_n) m ds \geq \chi(0)$$

и теоремы 14, делаем вывод: $(u, -\sigma'_n)$ — седловая точка модифицированного функционала Лагранжа $M(\cdot, \cdot)$. \square

Рассмотрим функционал, построенный при фиксированном $l \in L_2(\Gamma_K)$

$$F_l(m) = \chi(m) + \int_{\Gamma_K} l m ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 ds, \quad r > 0 — \text{const.}$$

Благодаря третьему слагаемому этот функционал является сильно выпуклым, а с учетом теоремы 13 еще и слабо полунепрерывным в $L_2(\Gamma_K)$.

Так как $\chi(\cdot)$ слабо полунепрерывный снизу в $L_2(\Gamma_K)$, его надграфик $\text{epi } \chi$ — выпуклое замкнутое множество в $L_2(\Gamma_K) \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. По теореме отделимости существуют такие $\alpha \in L_2(\Gamma)$ и $a \in \mathbb{R}$, что

$$\int_{\Gamma_K} \alpha m ds + \chi(m) + a \geq 0 \quad \forall m \in \text{dom } \chi.$$

Следовательно, для функционала $F_l(\cdot)$ справедлива оценка

$$F_l(m) \geq - \int_{\Gamma_K} \alpha m ds + \int_{\Gamma_K} l m ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 ds - a \quad \forall m \in L_2(\Gamma_K),$$

поэтому $F_l(m) \rightarrow +\infty$ при $\|m\|_{0, \Gamma_K} \rightarrow \infty$, т. е. $F_l(\cdot)$ коэрцитивен в $L_2(\Gamma_K)$.

Из слабой полунепрерывности снизу и коэрцитивности $F_l(\cdot)$ следует существование элемента $m(l) = \underset{m \in L_2(\Gamma_K)}{\text{argmin}} F_l(m)$. А сильная выпуклость $F_l(\cdot)$ на $\text{dom } \chi$ обеспечивает единственность элемента $m(l)$ для любого $l \in L_2(\Gamma_K)$.

Теорема 16. *Двойственный функционал $\underline{M}(\cdot)$ непрерывен в $L_2(\Gamma_K)$.*

Доказательство. Для любого $m \in \text{dom } \chi$ сильная выпуклость $F_l(\cdot)$ дает

$$\begin{aligned} \chi(m(l)) + \int_{\Gamma_K} l m(l) ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2(l) ds + \frac{r}{2} \|m - m(l)\|_{0, \Gamma_K}^2 &\leq \\ &\leq \chi(m) + \int_{\Gamma_K} l m ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 ds. \end{aligned}$$

Возьмем два произвольных элемента $l_1, l_2 \in L_2(\Gamma_K)$ и пусть $m_1 = m(l_1)$, $m_2 = m(l_2)$. Тогда из последнего неравенства следует

$$\begin{aligned} \chi(m_1) + \int_{\Gamma_K} l_1 m_1 ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m_1^2 ds + \frac{r}{2} \|m_2 - m_1\|_{0, \Gamma_K}^2 &\leq \\ &\leq \chi(m_2) + \int_{\Gamma_K} l_1 m_2 ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m_2^2 ds, \\ \chi(m_2) + \int_{\Gamma_K} l_2 m_2 ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m_2^2 ds + \frac{r}{2} \|m_1 - m_2\|_{0, \Gamma_K}^2 &\leq \\ &\leq \chi(m_1) + \int_{\Gamma_K} l_2 m_1 ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m_1^2 ds. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Складывая неравенства (3.23), получаем неравенство

$$r \|m_1 - m_2\|_{0, \Gamma_K}^2 \leq \int_{\Gamma_K} (l_1 - l_2)(m_2 - m_1) ds,$$

которое дает оценку:

$$\|m_1 - m_2\|_{0, \Gamma_K} \leq \frac{1}{r} \|l_1 - l_2\|_{0, \Gamma_K}. \quad (3.24)$$

Из неравенств (3.23) также получается соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_K} l_2(m_2 - m_1) ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} (m_2^2 - m_1^2) ds &\leq \chi(m_1) - \chi(m_2) \leq \\ &\leq \int_{\Gamma_K} l_1(m_2 - m_1) ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} (m_2^2 - m_1^2) ds. \end{aligned}$$

Перейдем в этом соотношении к пределу при $l_2 \rightarrow l_1$ в $L_2(\Gamma_K)$. С учетом (3.24) получаем

$$\lim_{l_2 \rightarrow l_1} \chi(m_2) = \chi(m_1).$$

Отсюда следует вывод, что функционал $\underline{M}(\cdot)$ непрерывен в $L_2(\Gamma_K)$. \square

Теорема 17. Двойственный функционал $\underline{M}(\cdot)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\Gamma_K)$ и его производная $\nabla \underline{M}(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $1/r$, т. е.

$$\|\nabla \underline{M}(l_1) - \nabla \underline{M}(l_2)\|_{0, \Gamma_K} \leq \frac{1}{r} \|l_1 - l_2\|_{0, \Gamma_K} \quad \forall l_1, l_2 \in L_2(\Gamma_K).$$

Доказательство. Из непрерывности вогнутого функционала $\underline{M}(\cdot)$ следует его субдифференцируемость. Пусть $t \in \partial \underline{M}(l)$ — некоторый субдифференциал для $l \in L_2(\Gamma_K)$, тогда для любого $\xi \in L_2(\Gamma_K)$ справедливо соотношение

$$\underline{M}(\xi) \leq \underline{M}(l) + (t, \xi - l)_{0, \Gamma_K},$$

из которого получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \chi(m(\xi)) + \int_{\Gamma_K} \xi m(\xi) ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2(\xi) ds \leq \\ & \leq \chi(m(l)) + \int_{\Gamma_K} l m(l) ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2(l) ds + (t, \xi - l)_{0, \Gamma_K} \leq \\ & \leq \chi(m(\xi)) + \int_{\Gamma_K} l m(\xi) ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2(\xi) ds + (t, \xi - l)_{0, \Gamma_K}. \end{aligned}$$

Из этого следует, что

$$\int_{\Gamma_K} m(\xi)(\xi - l) ds \leq (t, \xi - l)_{0, \Gamma_K} \quad \forall \xi \in L_2(\Gamma_K).$$

Для произвольных $h \in L_2(\Gamma_K)$ и $\beta > 0$ положим $\xi = l + \beta h$. Тогда последнее неравенство запишется:

$$\int_{\Gamma_K} m(l + \beta h)h ds \leq (t, h)_{0, \Gamma_K} \quad \forall h \in L_2(\Gamma_K).$$

Устремляя β к нулю и учитывая (3.24), получаем

$$\int_{\Gamma_K} m(l)h ds \leq (t, h)_{0, \Gamma_K} \quad \forall h \in L_2(\Gamma_K),$$

и следовательно:

$$\int_{\Gamma_K} m(l)h ds = (t, h)_{0, \Gamma_K} \quad \forall h \in L_2(\Gamma_K).$$

В силу единственности элемента $m(l)$ для любого $l \in L_2(\Gamma_K)$ из полученного равенства следует, что функционал $\underline{M}(\cdot)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\Gamma_K)$, причем $\nabla \underline{M}(l) = t = m(l)$. Неравенство (3.24) дает константу Липшица, завершая доказательство теоремы. \square

Вычисление $\underline{M}(l)$ само по себе требует решения экстремальной задачи. Но поскольку градиент функционала $\underline{M}(\cdot)$ Липшиц-непрерывен, то для решения двойственной задачи (3.17) можно использовать градиентный метод

$$l^{k+1} = l^k + \theta_k \nabla \underline{M}(l^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

с любым начальным $l^0 \in L_2(\Gamma_K)$, шагом $\theta_k \in [\beta, 2r - \beta]$, при $\beta \in (0, r]$ и градиентом $\nabla \underline{M}(l^k) = \operatorname{argmin}_{m \in L_2(\Gamma_K)} \left\{ \chi(m) + \int_{\Gamma_K} l^k m ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 ds \right\}$.

Теорема 18. Для алгоритма (3.25) выполняется предельное равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla \underline{M}(l^k)\|_{L_2(\Gamma_K)} = 0.$$

Доказательство. Аналогично [47, с. 31]. □

Для упрощения записей в дальнейшем будем использовать для скачка функции на Γ_K обозначение $[v] = v'_n + v''_n$. Алгоритм (3.25) можно переписать следующим образом [101; 51]:

$$(i) \quad u^{k+1} = \operatorname{argmin}_{v \in V} \left\{ \mathcal{L}(v) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left(((l^k + r[v])^+)^2 - (l^k)^2 \right) ds \right\}, \quad (3.26)$$

$$(ii) \quad l^{k+1} = l^k + r \max \left\{ [u^{k+1}], -\frac{l^k}{r} \right\}.$$

Покажем, что алгоритм (3.26) сходится по функционалу, т. е. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}(u^k) = \min_{v \in K} \mathcal{L}(v)$.

С одной стороны, слабая полунепрерывность $\chi(\cdot)$ обеспечивает выполнение неравенства

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left\{ \chi(m(l^k)) + \int_{\Gamma_K} l^k m(l^k) ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2(l^k) ds \right\} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \chi(m(l^k)) \geq \chi(0) = \mathcal{L}(u^*),$$

а с другой стороны:

$$\begin{aligned} \underline{M}(l^k) &= \chi(m(l^k)) + \int_{\Gamma_K} l^k m(l^k) ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2(l^k) ds = \\ &= \inf_{m \in L_2(\Gamma_K)} \left\{ \chi(m) + \int_{\Gamma_K} l^k m ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2 ds \right\} \leq \chi(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Откуда получается неравенство

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \chi(m(l^k)) + \int_{\Gamma_K} l^k m(l^k) ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2(l^k) ds \right\} \leq \chi(0).$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \chi(m(l^k)) + \int_{\Gamma_K} l^k m(l^k) ds + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_K} m^2(l^k) ds \right\} = \chi(0) = \mathcal{L}(u^*).$$

Теперь из теоремы 18 следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}(u^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \chi(m(l^k)) = \chi(0) = \mathcal{L}(u^*).$$

Предположив, что решение u^* задачи (3.8) обладает $H^2(\Omega)$ -гладкостью, можно доказать [15], что метод (3.26) сходится к единственной седловой точке $(u^*, -\sigma_n)$ функционала Лагранжа.

3.3 Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа

Конечно-элементная реализация алгоритма Удзавы в полукоэрцитивном случае приводит к вырожденной матрице квадратичной формы минимизируемого функционала. Для устранения этого недостатка построим устойчивый алгоритм, основанный на итеративной проксимальной регуляризации модифицированного функционала Лагранжа [49].

Выберем произвольную пару $(v^0, l^0) \in V \times L_2(\Gamma_K)$. На $(k+1)$ -м шаге находим пару (v^{k+1}, l^{k+1}) следующим образом:

(i) определяем v^{k+1} из критерия $\|v^{k+1} - \tilde{v}^{k+1}\|_{1,\Omega} \leq \delta_k$,

$$\text{где } \tilde{v}^{k+1} = \operatorname{argmin}_{v \in V} \left\{ M(v, l^k) + \frac{1}{2} \|v - v^k\|_{0,\Omega}^2 \right\}, \delta_k > 0, \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty. \quad (3.27)$$

(ii) корректируем двойственную переменную по формуле

$$l^{k+1} = (l^k + r[v^{k+1}])^+.$$

Регуляризирующая добавка $\frac{1}{2}\|v - v^k\|_{0,\Omega}^2$ обеспечивает сильную выпуклость минимизируемого функционала, что гарантирует единственность решения вспомогательных задач

$$M(v, l^k) + \frac{1}{2}\|v - v^k\|_{0,\Omega}^2 \rightarrow \min_{v \in V}. \quad (3.28)$$

Введем величину $\mu^{k+1} = (l^k + r[\tilde{v}^{k+1}])^+$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Определим скалярные произведения в пространствах $L_2(\Omega) \times L_2(\Gamma_K)$ и $\mathcal{H}^1(\Omega) \times L_2(\Gamma_K)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle (v_1, t_1), (v_2, t_2) \rangle_0 &= (v_1, v_2)_{0,\Omega} + \frac{1}{r}(t_1, t_2)_{0,\Gamma_K}, \\ \langle (v_1, t_1), (v_2, t_2) \rangle_1 &= (v_1, v_2)_{\mathcal{H}^1(\Omega)} + \frac{1}{r}(t_1, t_2)_{0,\Gamma_K}. \end{aligned}$$

Порожденные ими нормы:

$$\begin{aligned} \|(v, t)\|_0^2 &= \|v\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{r}\|t\|_{0,\Gamma_K}^2, \\ \|(v, t)\|_1^2 &= \|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{r}\|t\|_{0,\Gamma_K}^2. \end{aligned}$$

И пусть $z^k = (v^k, l^k)$, $w^k = (\tilde{v}^k, \mu^k)$.

Теорема 19. Пусть множество седловых точек функционала Лагранжа $L(\cdot, \cdot)$ не является пустым. Тогда последовательность $\{w^k\}$, генерируемая по алгоритму (3.27), ограничена в $V \times L_2(\Gamma_K)$ и, более того, — последовательность $\{\tilde{v}^k\}$ компактна в V .

Доказательство. Существование точек z^k , w^k , $k = 1, 2, \dots$, очевидно. Покажем, что для любого k имеет место неравенство

$$\|z^* - z^k\|_0^2 \geq \|w^{k+1} - z^*\|_0^2 + \|w^{k+1} - z^k\|_0^2, \quad (3.29)$$

где $z^* = (v^*, l^*)$ — произвольная седловая точка $L(\cdot, \cdot)$.

Определение седловой точки z^* эквивалентно соотношениям

$$[v^*] \leq 0, \quad l^* \geq 0, \quad [v^*]l^* = 0, \quad (3.30)$$

$$L(v^*, l^*) \leq L(v, l^*) \quad \forall v \in V. \quad (3.31)$$

Первые соотношения равносильны равенству

$$l^* = (l^* + r[v^*])^+. \quad (3.32)$$

А второе равносильно равенству

$$A(v^*, v - v^*) - FP(v - v^*) + \int_{\Gamma_K} l^*([v] - [v^*]) ds = 0 \quad \forall v \in V. \quad (3.33)$$

Из (3.32) и (3.33) вытекает равенство

$$A(v^*, v - v^*) - FP(v - v^*) + \int_{\Gamma_K} (l^* + r[v^*])^+([v] - [v^*]) ds = 0 \quad \forall v \in V. \quad (3.34)$$

Очевидно, что \tilde{v}^{k+1} , являясь точкой минимума, удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} & (\tilde{v}^{k+1} - v^k, v - \tilde{v}^{k+1})_0 + A(\tilde{v}^{k+1}, v - \tilde{v}^{k+1}) - FP(v - \tilde{v}^{k+1}) + \\ & + \int_{\Gamma_K} (l^k + r[\tilde{v}^{k+1}])^+([v] - [\tilde{v}^{k+1}]) ds = 0 \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Положим, что в (3.34) $v = \tilde{v}^{k+1}$, в (3.35) $v = v^*$, и сложим эти два равенства.

Получим:

$$\begin{aligned} & (\tilde{v}^{k+1} - v^k, v^* - \tilde{v}^{k+1})_0 - A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, \tilde{v}^{k+1} - v^*) + \\ & + \int_{\Gamma_K} ((l^* + r[v^*])^+ - (l^k + r[\tilde{v}^{k+1}])^+)([\tilde{v}^{k+1}] - [v^*]) ds = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & (\tilde{v}^{k+1} - v^k, v^* - \tilde{v}^{k+1})_0 = \\ & = A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, \tilde{v}^{k+1} - v^*) - \int_{\Gamma_K} ((l^* + r[v^*])^+ - (l^k + r[\tilde{v}^{k+1}])^+)([\tilde{v}^{k+1}] - [v^*]) ds = \\ & = A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, \tilde{v}^{k+1} - v^*) - \int_{\Gamma_K} (l^* - \mu^{k+1})([\tilde{v}^{k+1}] - [v^*]) ds = \\ & = A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, \tilde{v}^{k+1} - v^*) + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_K} (\mu^{k+1} - l^*)(r[\tilde{v}^{k+1}] - r[v^*]) ds = \\ & = A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, \tilde{v}^{k+1} - v^*) + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_K} (\mu^{k+1} - l^*)(l^k + r[\tilde{v}^{k+1}] - l^k - l^* - r[v^*] + l^*) ds = \\ & = A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, \tilde{v}^{k+1} - v^*) + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_K} (\mu^{k+1} - l^*)((l^k + r[\tilde{v}^{k+1}]) - l^k - (l^* + r[v^*]) + l^*) ds = \\ & = A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, \tilde{v}^{k+1} - v^*) + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_K} (\mu^{k+1} - l^*)((l^k + r[\tilde{v}^{k+1}]) - (l^* + r[v^*])) ds + \\ & \quad + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_K} (\mu^{k+1} - l^*)(-l^k + l^*) ds \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, \tilde{v}^{k+1} - v^*) + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_K} (\mu^{k+1} - l^*) ((l^k + r[\tilde{v}^{k+1}])^+ - (l^* + r[v^*])^+) ds + \\
&\quad + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_K} (\mu^{k+1} - l^*) (-l^k + l^*) ds = \\
&= A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, \tilde{v}^{k+1} - v^*) + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_K} (\mu^{k+1} - l^*) (\mu^{k+1} - l^*) ds + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_K} (\mu^{k+1} - l^*) (-l^k + l^*) ds = \\
&= A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, \tilde{v}^{k+1} - v^*) + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_K} (\mu^{k+1} - l^*) (\mu^{k+1} - l^* - l^k + l^*) ds = \\
&= A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, \tilde{v}^{k+1} - v^*) + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_K} (\mu^{k+1} - l^*) (\mu^{k+1} - l^k) ds.
\end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
(\tilde{v}^{k+1} - v^k, v^* - \tilde{v}^{k+1})_0 + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_K} (\mu^{k+1} - l^*) (l^k - \mu^{k+1}) ds &\geq \\
&\geq A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, \tilde{v}^{k+1} - v^*) \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
\|v^k - v^*\|_{0,\Omega}^2 &= \|(v^k - \tilde{v}^{k+1}) + (\tilde{v}^{k+1} - v^*)\|_{0,\Omega}^2 = \\
&= \|v^k - \tilde{v}^{k+1}\|_{0,\Omega}^2 + 2(v^k - \tilde{v}^{k+1}, \tilde{v}^{k+1} - v^*)_{0,\Omega} + \|\tilde{v}^{k+1} - v^*\|_{0,\Omega}^2, \\
\|l^k - l^*\|_{0,\Gamma_K}^2 &= \|l^k - \mu^{k+1}\|_{0,\Gamma_K}^2 + 2(l^k - \mu^{k+1}, \mu^{k+1} - l^*)_{L_2(\Gamma_K)} + \|\mu^{k+1} - l^*\|_{0,\Gamma_K}^2.
\end{aligned}$$

Домножим второе на $\frac{1}{r}$ и сложим с первым:

$$\begin{aligned}
&\|v^k - v^*\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{r} \|l^k - l^*\|_{0,\Gamma_K}^2 = \\
&= \|v^k - \tilde{v}^{k+1}\|_{0,\Omega}^2 + 2(v^k - \tilde{v}^{k+1}, \tilde{v}^{k+1} - v^*)_{0,\Omega} + \|\tilde{v}^{k+1} - v^*\|_{0,\Omega}^2 + \\
&+ \frac{1}{r} \|l^k - \mu^{k+1}\|_{0,\Gamma_K}^2 + \frac{2}{r} (l^k - \mu^{k+1}, \mu^{k+1} - l^*)_{0,\Gamma_K} + \frac{1}{r} \|\mu^{k+1} - l^*\|_{0,\Gamma_K}^2
\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.36) вытекает соотношение

$$\begin{aligned}
&\|v^k - v^*\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{r} \|l^k - l^*\|_{0,\Gamma_K}^2 \geq \\
&\geq \|v^k - \tilde{v}^{k+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{r} \|l^k - \mu^{k+1}\|_{0,\Gamma_K}^2 + \|\tilde{v}^{k+1} - v^*\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{r} \|\mu^{k+1} - l^*\|_{0,\Gamma_K}^2,
\end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (3.29).

Из формул для l^{k+1} , μ^{k+1} и из первого шага (3.27) следует

$$\begin{aligned}
&\|l^{k+1} - \mu^{k+1}\|_{0,\Gamma_K} = \|(l^k + r[v^{k+1}])^+ - (l^k + r[\tilde{v}^{k+1}])^+\|_{0,\Gamma_K} \leq \\
&\leq \|l^k + r[v^{k+1}] - l^k - r[\tilde{v}^{k+1}]\|_{0,\Gamma_K} = r\|[v^{k+1}] - [\tilde{v}^{k+1}]\|_{0,\Gamma_K} \leq \\
&\leq rC\|[v^{k+1}] - [\tilde{v}^{k+1}]\|_{1,\Omega} \leq rC\delta_k,
\end{aligned}$$

где $C > 0$ — константа вложения $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Поэтому

$$\|z^{k+1} - w^{k+1}\|_1^2 \leq \delta_k^2 + \frac{1}{r} r^2 C^2 \delta_k^2 = (1 + rC^2) \delta_k^2. \quad (3.37)$$

Из (3.29) имеем

$$\|w^{k+1} - z^*\|_0 \leq \|z^k - z^*\|_0.$$

Неравенство (3.37) дает

$$\begin{aligned} \|z^{k+1} - z^*\|_0 &\leq \|z^{k+1} - w^{k+1}\|_0 + \|w^{k+1} - z^*\|_0 \leq \\ &\leq \sqrt{1 + rC^2} \delta_k + \|z^k - z^*\|_0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \|z^{k+1} - z^*\|_0 &\leq \sqrt{1 + rC^2} \delta_k + \|z^k - z^*\|_0, \\ \|z^{k+2} - z^*\|_0 &\leq \sqrt{1 + rC^2} \delta_{k+1} + \|z^{k+1} - z^*\|_0, \\ &\dots \\ \|z^{k+p} - z^*\|_0 &\leq \sqrt{1 + rC^2} \delta_{k+p-1} + \|z^{k+p-1} - z^*\|_0. \end{aligned}$$

Суммируя, получаем

$$\begin{aligned} \|z^{k+p} - z^*\|_0 &\leq \sqrt{1 + rC^2} \sum_{i=1}^p \delta_{k+i-1} + \|z^k - z^*\|_0 \leq \\ &\leq \sqrt{1 + rC^2} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{k+i-1} + \|z^k - z^*\|_0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Отсюда следует ограниченность в $L_2(\Omega) \times L_2(\Gamma_K)$ последовательности $\{z^k - z^*\}$. Тогда из (3.37) вытекает, что и последовательность $\{w^k\}$ ограничена в $L_2(\Omega) \times L_2(\Gamma_K)$.

Пусть $\varliminf_{k \rightarrow \infty} \|z^k - z^*\|_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z^{k_n} - z^*\|_0$. Неравенство (3.38) при $k = k_n$ дает

$$\|z^{k_n+p} - z^*\|_0 \leq \sqrt{1 + rC^2} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{k_n+i-1} + \|z^{k_n} - z^*\|_0.$$

Устремив n к бесконечности, для $p = 1, 2, \dots$ имеем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|z^{k_n+p} - z^*\|_0 \leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|z^k - z^*\|_0,$$

или

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \|z^m - z^*\|_0 \leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|z^k - z^*\|_0,$$

т. е. $\lim_{m \rightarrow \infty} \|z^m - z^*\|_0$ существует, а это означает сходимость последовательности $\{\|z^k - z^*\|\}$.

Из (3.29) следует

$$\begin{aligned} \|w^{k+1} - z^k\|_0^2 &\leq \|z^k - z^*\|_0^2 - \|w^{k+1} - z^*\|_0^2 \leq \\ &\leq \|z^k - z^*\|_0^2 - (\|w^{k+1} - z^{k+1}\|_0 - \|z^{k+1} - z^*\|_0)^2. \end{aligned}$$

Учитывая (3.37), при $k \rightarrow \infty$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^{k+1} - z^k\|_0 = 0. \quad (3.39)$$

Теперь из (3.36) следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, \tilde{v}^{k+1} - v^*) = 0. \quad (3.40)$$

Следовательно, $\{w^k\}$ ограничена в $V \times L_2(\Gamma_K)$. Тогда последовательность $\{\tilde{v}^k\}$ компактна в $L_2(\Omega)$. Повторно применяя (3.40), получаем компактность последовательности $\{\tilde{v}^k\}$ в V . \square

Теорема 20. Пусть выполнено условие теоремы 19 и, кроме того, решения \tilde{v}^k , $k = 1, 2, \dots$, вспомогательных задач (3.28) удовлетворяют условиям

1. $\tilde{v}^k \in H^2(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots$,
2. $\|\tilde{v}^k\|_{2,\Omega} \leq C$, $C > 0$ — постоянная.

Тогда последовательность $\{z^k\}$ сходится к единственной седловой точке (v^*, l^*) функционала $L(\cdot, \cdot)$.

Доказательство. Из (3.40) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(v^{k+1} - v^*, v^{k+1} - v^*) = 0. \quad (3.41)$$

Так как

$$A(\tilde{v}^{k+1} - v^k, \tilde{v}^{k+1} - v^k) = A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, \tilde{v}^{k+1} - v^*) + 2A(\tilde{v}^{k+1} - v^*, v^* - v^k) + A(v^* - v^k, v^* - v^k),$$

то $\lim_{k \rightarrow \infty} A(v^{k+1} - v^k, v^{k+1} - v^k) = 0$, что вместе с равенством (3.39) дает

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^{k+1} - z^k\|_1 = 0. \quad (3.42)$$

Поскольку решение \tilde{v}^{k+1} вспомогательной задачи (3.28) принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$, то оно является решением и краевой задачи

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^\alpha(v) + F_i^\alpha - v + v^k &= 0 & \text{в } \Omega, \quad i, j = 1, 2, \quad \alpha = ', ', \\ \sigma_{ij}^\alpha n_j^\alpha &= P_i^\alpha & \text{на } \Gamma_\tau^\alpha, \quad \alpha = ', ', \\ u &= 0 & \text{на } \Gamma_u \subset \partial\Omega', \\ u_n = u_i n_i &= 0 & \text{на } \Gamma_0 \subset \partial\Omega'', \\ -\sigma_n(v) &= (l^k + r[v])^+ & \text{на } \Gamma_K, \\ \sigma'_\tau &= \sigma''_\tau = 0 & \text{на } \Gamma_K. \end{aligned}$$

Тем самым равенство $-\sigma_n(\tilde{v}^{k+1}) = \mu^{k+1}$ и предположения теоремы гарантируют компактность последовательности $\{\mu^k\}$ в $L_2(\Gamma_K)$, поэтому последовательность $\{w^k\}$ компактна в $V \times L_2(\Gamma_K)$.

Пусть $\lim_{\tau \rightarrow \infty} w^{k_\tau} = c^* = (a^*, b^*)$.

Так как $\|z^{k_\tau} - c^*\|_1 \leq \|z^{k_\tau} - w^{k_\tau}\|_1 + \|w^{k_\tau} - c^*\|_1$, то из (3.37) следует, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|z^{k_\tau} - c^*\|_1 = 0$. Покажем, что c^* является седловой точкой функционала Лагранжа $L(\cdot, \cdot)$. Имеем

$$\|w^{k_\tau+1} - c^*\|_1 \leq \|w^{k_\tau+1} - z^{k_\tau}\|_1 + \|z^{k_\tau} - c^*\|_1,$$

тогда с учетом (3.31) получаем, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|w^{k_\tau+1} - c^*\|_1 = 0$.

Тем самым $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|z^{k_\tau+1} - c^*\|_1 = 0$. В формуле $l^{k_\tau+1} = (l^{k_\tau} + r[v^{k_\tau+1}])^+$ устремим τ к бесконечности. Тогда из условия $\lim_{\tau \rightarrow \infty} z^{k_\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} z^{k_\tau+1} = c^*$ в $H^1(\Omega) \times L_2(\Gamma_K)$ вытекает, что $b^* = (b^* + r[a^*])^+$. Это равносильно соотношениям

$$[a^*] \leq 0, \quad b^* \geq 0, \quad [a^*]b^* = 0. \quad (3.43)$$

Равенство (3.35) равносильно соотношению

$$(\tilde{v}^{k+1} - v^k, v)_{0,\Omega} + A(\tilde{v}^{k+1}, v) - FP(v) + \int_{\Gamma_K} (l^k + r[\tilde{v}^{k+1}])^+[v] ds = 0 \quad \forall v \in V.$$

Пусть $k = k_\tau$, устремим τ к бесконечности. С учетом (3.42) получаем

$$A(a^*, v) - FP(v) + \int_{\Gamma_K} (b^* + r[a^*])^+[v] ds = 0 \quad \forall v \in V,$$

или

$$A(a^*, v) - FP(v) + \int_{\Gamma_K} b^*[v] ds = 0 \quad \forall v \in V.$$

Следовательно:

$$L(a^*, b^*) \leq L(v, b^*) \quad \forall v \in V \quad (3.44)$$

Совокупность условий (3.43), (3.44) означает, что точка $c^* = (a^*, b^*)$ является седловой для функционала $L(\cdot, \cdot)$.

Ранее было показано существование $\lim_{m \rightarrow \infty} \|z^m - z^*\|_0$ для любой седловой точки z^* , в том числе и для c^* . Так как $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|z^{k\tau} - c^*\|_0 = 0$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} \|z^m - c^*\|_0 = 0$. Вместе с условием (3.41) это означает, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|z^m - c^*\|_1 = 0,$$

т. е. последовательность $\{z^k\}$ сходится к c^* в $H^1(\Omega) \times L_2(\Gamma_K)$.

Покажем единственность седловой точки. Из условий 1 и 2 теоремы следует, что $\{\tilde{v}^k\}$ слабо компактна в $H^2(\Omega)$. Пусть \tilde{a} — слабый предел в $H^2(\Omega)$ подпоследовательности $\{\tilde{v}^{k_j}\}$. Но $\{\tilde{v}^{k_j}\}$ вместе с $\{v^{k_j}\}$ сходится сильно в $H^1(\Omega)$ к a^* . Значит, $\{\tilde{v}^{k_j}\}$ сходится слабо к a^* в $H^1(\Omega)$.

Так как сопряженное к $H^1(\Omega)$ пространство вложено в сопряженное к $H^2(\Omega)$ пространство, то из единственности слабого предела следует, что $\tilde{a} = a^*$ и, следовательно $a^* \in H^2(\Omega)$. Значит функционал Лагранжа $L(\cdot, \cdot)$ имеет единственную седловую точку $c^* = (v^*, -\sigma_n(v^*))$, т. е. $a^* = v^*$, $b^* = -\sigma_n(v^*)$. \square

3.4 Задача с учетом трения

В рассмотренной ранее задаче (3.1)–(3.7) касательная составляющая вектора напряжений на контакте $\sigma_\tau = 0$. Очевидно, что предположение об отсутствии трения между Ω' и Ω'' не соответствует реальности, поэтому следует учитывать его влияние. Обзор коэрцитивного случая задачи контакта двух тел можно найти в [84]. Мы продолжим рассматривать случай, когда одно из тел не имеет жесткой фиксации [85].

Как и ранее, в этой модели присутствуют условия

$$\sigma_{ij,j}^\alpha(u) + F_i^\alpha = 0 \text{ в } \Omega^\alpha, \quad (3.45)$$

$$\sigma_{ij}^\alpha(u)n_j^\alpha = P_i^\alpha \text{ на } \Gamma_\tau^\alpha, \quad (3.46)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_u \subset \partial\Omega', \quad (3.47)$$

$$u_n = u_i n_i = 0 \text{ на } \Gamma_0 \subset \partial\Omega''. \quad (3.48)$$

На Γ_K выполняется условие типа Синьорини:

$$u'_n + u''_n \leq 0, \quad \sigma'_n(u) = \sigma''_n(u) = \sigma_n \leq 0, \quad (u'_n + u''_n)\sigma_n = 0. \quad (3.49)$$

Конечное ненулевое трение на Γ_K выражается законом Кулона:

$$\begin{aligned} \sigma'_\tau(u) = \sigma''_\tau(u) = \sigma_\tau, \quad |\sigma_\tau| \leq \mathcal{F}|\sigma_n|, \quad (|\sigma_\tau| - \mathcal{F}|\sigma_n|)|u'_\tau + u''_\tau| = 0, \\ u'_\tau + u''_\tau = \lambda\sigma_\tau \text{ на } \{x \in \Gamma_K : \mathcal{F}\sigma_n < 0\}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

где \mathcal{F} — коэффициент трения, $\mathcal{F} \geq 0$ на Γ_K , λ — неположительная функция на Γ_K .

Решение $u \in K$ данной краевой задачи удовлетворяет квазивариационному неравенству

$$A(u, v - u) + \int_{\Gamma_K} \mathcal{F}|\sigma_n|(|v'_\tau + v''_\tau| - |u'_\tau + u''_\tau|) ds \geq FP(v - u) \quad \forall v \in K. \quad (3.51)$$

Основной сложностью при исследовании и построении численных алгоритмов решения подобных задач является зависимость силы трения $\mathcal{F}|\sigma_n(u)|$ от искомого решения u .

Для решения квазивариационного неравенства применим метод последовательных приближений. Задаем начальную силу трения $g_0 \in L_2(\Gamma_K)$, $g_0 \geq 0$, на $(m + 1)$ -м шаге определяем u^{m+1} как решение неравенства

$$A(u^{m+1}, v - u^{m+1}) + \int_{\Gamma_K} g_m(|v'_\tau + v''_\tau| - |(u'_\tau + u''_\tau)^{m+1}|) ds \geq FP(v - u^{m+1}) \quad \forall v \in K, \quad (3.52)$$

где $g_m = \mathcal{F}|\sigma_n(u^m)|$, $m = 1, 2, \dots$

Задачу (3.52) будем называть задачей с заданным трением. Можно показать, что она аналогична задаче минимизации функционала

$$\mathcal{L}_m(v) = \frac{1}{2}A(v, v) - FP(v) + \int_{\Gamma_K} g_m|v'_\tau + v''_\tau| ds \rightarrow \min_{v \in K}. \quad (3.53)$$

Каждый итерационный шаг метода последовательных приближений заключается в решении задачи (3.53) при заданной силе трения g_m и вычислении нового значения g_{m+1} .

Для решения задачи (3.53) нами использован рассмотренный ранее модифицированный метод двойственности. Как уже говорилось, помимо решения самой задачи, мы получаем на выходе метода ещё и значение двойственной переменной, совпадающее с σ_n . Поэтому нет необходимости использовать численное

дифференцирование, можно сразу переходить к следующей итерации метода последовательных приближений.

Модифицированный функционал Лагранжа для этой задачи

$$M_m(v, l) = \frac{1}{2}A(v, v) - FP(v) + \int_{\Gamma_K} g_m |v'_\tau + v''_\tau| ds + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left(((l + r(v'_n + v''_n))^+)^2 - l^2 \right) ds.$$

Алгоритм Удзавы записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (i) \quad u^{k+1} &= \operatorname{argmin}_{v \in V} M_m(v, l^k), \\ (ii) \quad l^{k+1} &= l^k + r \max \left\{ [u^{k+1}], -\frac{l^k}{r} \right\}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

3.5 Численное решение задачи контакта двух тел

В проведенных расчетах Ω — единичный квадрат, состоящий из двух одинаковых прямоугольников (рисунок 3.2) со сторонами, параллельными координатным осям. Правая стенка Ω'' может перемещаться только в вертикальном направлении ($\Gamma_0 = \{(x, y) : x = 1, 0.5 \leq y \leq 1\}$).

Для верхнего тела на Γ_0 вектор нормали $n'' = (1, 0)$, так что $z''_n = 0$ при любых $x_1, x_2 \in \Gamma_0$ только в том случае, когда $a''_1 = b'' = 0$. Таким образом, $R \cap V = \{z \in \mathcal{H}^1(\Omega) : z = (z', z''), z' = (0, 0), z'' = (0, a)\}$.

На Γ_K вектор нормали $n''_2 = (0, -1)$. Так что для $y \in (K \cap R) \subset (V \cap R)$

$$(y'_n + y''_n = an''_2 \leq 0 \text{ на } \Gamma_K) \iff (a > 0).$$

В таком случае при выполнении условия

$$V''_2 = \int_{\Omega} F''_2 d\Omega + \int_{\Gamma''_\tau} P''_2 ds < 0 \quad (3.55)$$

будет справедливо

$$\begin{aligned} \forall y \in K \cap R \quad FP(y) &\leq 0, \\ \forall y \in (K \cap R) \setminus \{0\} \quad FP(y) &< 0. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно теореме 2.4 из [7, с. 127], функционал $\mathcal{L}(\cdot)$ коэрцитивен на K и существует единственное слабое решение задачи, а условие (3.55) является условием разрешимости.

3.5.1 Аппроксимация и алгоритм поиска седловой точки

Решим задачу, в которой на левую треть верхней стороны тела Ω'' воздействует сила $P_2'' = -60$ Н (рисунок 3.2). Объемные силы отсутствуют. Модуль упругости $E = 73000$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.34$.

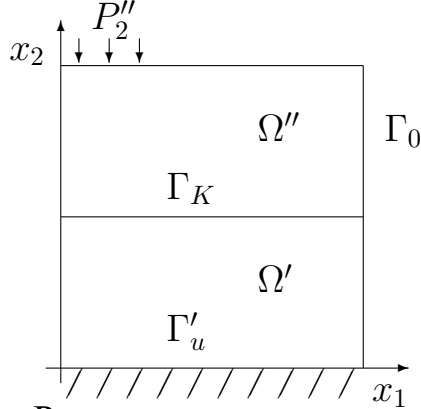


Рисунок 3.2 — Распределение поверхностной силы P_2''

В таком случае условие разрешимости (3.55) выполняется.

Осуществим дискретизацию тем же способом, что и в разделе 1.3.2. Пусть I_K — множество индексов узлов, лежащих на границе Γ_K . Каждому такому узлу соответствуют два усеченных конечных элемента, — один для верхнего тела, а другой для нижнего. Соответственно в каждом из этих конечных элементов своя пробная функция и свои значения $(v_i^{(1)}, v_i^{(2)})$.

Как и во второй главе, выполним замену переменных: $t_i = v_i'^{(2)} - v_i''^{(2)}$ (для обоих тел считаем нормаль на Γ_K сонаправленной с осью Ox_2). Тогда $v_i''^{(2)} = v_i'^{(2)} - t_i$ для $i \in I_K$. Интеграл $\frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} (((l + r(v_n' + v_n''))^+)^2 - l^2) ds$ аппроксимируем по формуле трапеций: $\frac{h}{2r} \sum_{i \in I_K} (((l_i + r t_i)^+)^2 - l_i^2)$. Конечно-элементную аппроксимацию множества V обозначим как V_h .

Алгоритм поиска седловой точки (3.26) реализуем в виде двух циклов. Во внутреннем осуществляется шаг (i), на котором отыскивается минимум функционала Лагранжа на конечномерном множестве V_h при фиксированном l^k . Критерий остановки: $\max_i |u_i^{k+1} - u_i^k| \leq 10^{-6} \cdot \varepsilon \cdot h$. Во внешнем цикле осуществляется шаг (ii), где происходит уточнение двойственной переменной.

При проксимальной регуляризации модифицированного функционала на первом шаге метода Удзавы имеем задачу минимизации вида

$$M(v, l^k) + \frac{1}{2} \|v - v_h^k\|_{0, \Omega}^2 \rightarrow \min_{v \in V_h},$$

1 repeat

$$2 \quad \left| \quad u^{k+1} = \operatorname{argmin}_{v_h \in V_h} \left\{ \mathcal{L}(v_h) + \frac{h}{2r} \sum_{i \in I_K} \left((l_i^k + r t_i)^+ \right)^2 - (l_i^k)^2 \right\}; \right.$$

$$3 \quad \left| \quad l^{k+1} = l^k + r \max \left\{ t^{k+1}, -\frac{l^k}{r} \right\}; \right.$$

4 until $\max_i |l_i^{k+1} - l_i^k| \leq \varepsilon;$

Алгоритм 3: Задача о контакте двух тел.

где v_h^k — конечно-элементное решение, полученное на предыдущей итерации.

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} & M(v, l^k) + \frac{1}{2} \|v - v_h^k\|_{0, \Omega}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega - \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\tau}} P_i v_i ds + \\ &+ \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left(((l + r[v])^+)^2 - l^2 \right) ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v - v_h^k)^2 d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) + v^2) d\Omega - \int_{\Omega} (F_i + v_h^k) v_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\tau}} P_i v_i ds + \\ &+ \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left(((l + r[v])^+)^2 - l^2 \right) ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v_h^k)^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Постоянное слагаемое здесь можно отбросить.

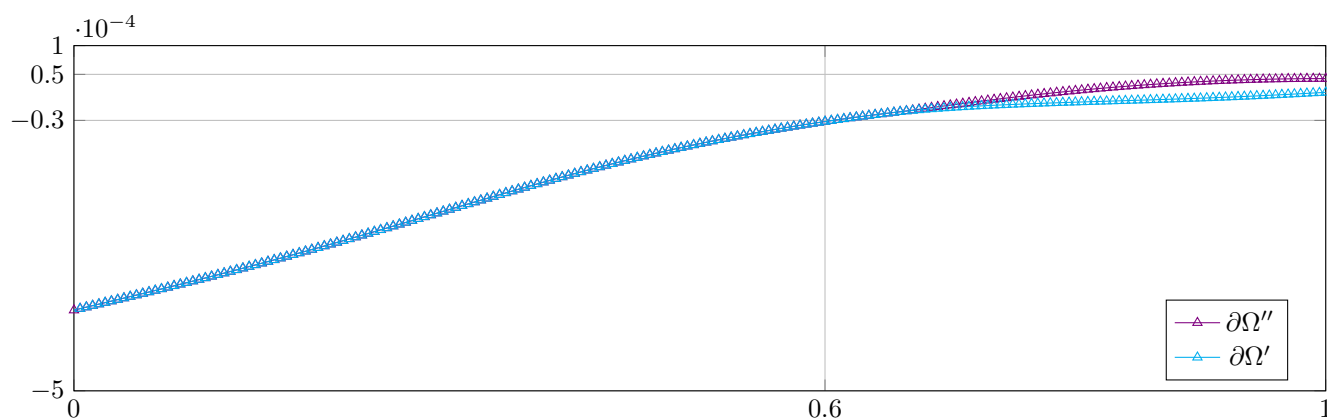
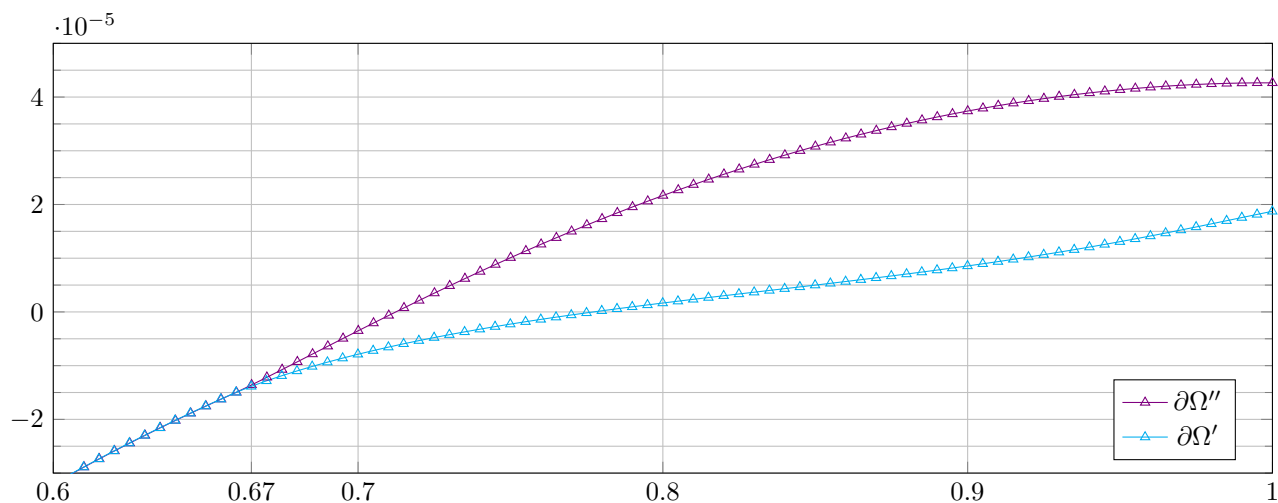
3.5.2 Результаты вычислительных экспериментов

При $\varepsilon = 10^{-5}$ и шаге триангуляции $h = 1/50$ была проведена серия расчетов для разных значений параметра метода r . Результаты представлены в таблице 3. Как видно, при больших значениях r метод позволяет уменьшить число итераций по двойственной переменной.

Зона контакта тел показана на рисунке 3.3, сделанном для шага триангуляции $h = \frac{1}{200}$ (показаны только узлы, принадлежащие Γ_K). Здесь ноль по оси Oy соответствует положению Γ_K в случае, когда на тела не воздействуют никакие силы. Как видно, на небольшом участке $[0.665, 1.000] \subset \Gamma_K$ тела разошлись. Вид зоны контакта в месте расхождения показан на рисунке 3.4.

Таблица 3 — Зависимость числа итераций от параметра r

Параметр r	Внутренние итерации	Внешние итерации	Время, (сек.)
10^8	67347	4	105
10^9	60888	3	100
10^{10}	57006	3	93
10^{11}	53663	3	89
10^{12}	53072	3	82
10^{13}	53041	2	82

Рисунок 3.3 — Вид зоны контакта Γ_K (при $h = \frac{1}{200}$)Рисунок 3.4 — Вид зоны контакта Γ_K в месте расхождения тел (при $h = \frac{1}{200}$)

Для решения задачи о контакте двух упругих тел можно использовать метод Зейделя с проектированием. При таких же параметрах (критерий остановки счета, шаг триангуляции h , точность ε) этим методом задача решается за 53035 итераций (83 сек.).

Одно из преимуществ рассматриваемого метода — одновременное решение двойственной задачи. Значение двойственной переменной может понадобиться при решении задачи, учитывающей трение. Такая задача рассматривается далее.

3.5.3 Результаты вычислительных экспериментов для задачи с учетом трения

В этом разделе приведены численные расчеты для задачи контакта двух тел с учетом трения, поставленной в разделе 3.4.

Аппроксимация осуществляется так же, как и ранее, но здесь, помимо замены переменных $t_i = v_i'^{(2)} - v_i''^{(2)}$ для $i \in I_K$, необходимо выполнить ещё и замену: $s_i = v_i'^{(1)} - v_i''^{(1)}$ (считаем, что для обоих тел вектор касательной для $x \in \Gamma_K$ сонаправлен с осью Ox_1). Тогда $v_i''^{(1)} = v_i'^{(1)} - s_i$ для $i \in I_K$. Интеграл $\int_{\Gamma_K} g_m |v_\tau' + v_\tau''| ds$ аппроксимируем по формуле трапеций: $h \sum_{i \in I_K} g_m |s_i|$.

На псевдокоде алгоритм последовательных приближений можно записать следующим образом:

```

1 repeat
2   repeat
3      $u^{k+1} =$ 
4      $\operatorname{argmin}_{v_h \in V_h} \left\{ \mathcal{L}(v_h) + h \sum_{i \in I_K} g_m |s_i| + \frac{h}{2r} \sum_{i \in I_K} \left( ((l_i^k + r t_i)^+)^2 - (l_i^k)^2 \right) \right\};$ 
5      $l^{k+1} = l^k + r \max \left\{ t^{k+1}, -\frac{l^k}{r} \right\};$ 
6     until  $\max_i |l_i^{k+1} - l_i^k| \leq \varepsilon;$ 
7      $g_{m+1} = \mathcal{F} \cdot l^{k+1};$ 
8   until  $\max_i |g_i^{m+1} - g_i^m| \leq \varepsilon;$ 

```

Алгоритм 4: Задача контакта двух тел с учетом трения.

Как и прежде, условие остановки счета в методе поточечной релаксации (в третьей строке алгоритма):

$$\max_i |u_i^{k+1} - u_i^k| \leq 10^{-4} \cdot \varepsilon \cdot h.$$

Для сравнения моделей численные расчеты проведены при тех же параметрах, что и в разделе 3.5.2. В таблице 4 представлены расчеты при разных значениях r , при $\varepsilon = 10^{-5}$, шаге триангуляции $h = 1/50$ и коэффициенте трения $\mathcal{F} = 0.5$.

Таблица 4 — Зависимость числа итераций от параметра r

Параметр r	Итерации МПТР	Итерации МУ	Итерации МПП	Время, (с)
10^8	57908	30	7	71
10^9	54405	40	7	66
10^{10}	53812	40	7	66
10^{11}	53764	25	7	66
10^{12}	53752	17	7	66
10^{13}	53748	15	7	66

Рисунок 3.5 сделан при шаге триангуляции $h = \frac{1}{200}$. Как и ранее, линиями с треугольными маркерами (\blacktriangle и \blacktriangleleft) изображены границы тел для случая, когда трение отсутствует, линиями с квадратными маркерами (\square и \squareleftarrow) — границы тел, когда $\mathcal{F} = 0.5$. Как видно, в задаче с учетом трения тела разошлись на другом участке $[0.78, 1.00] \subset \Gamma_K$.

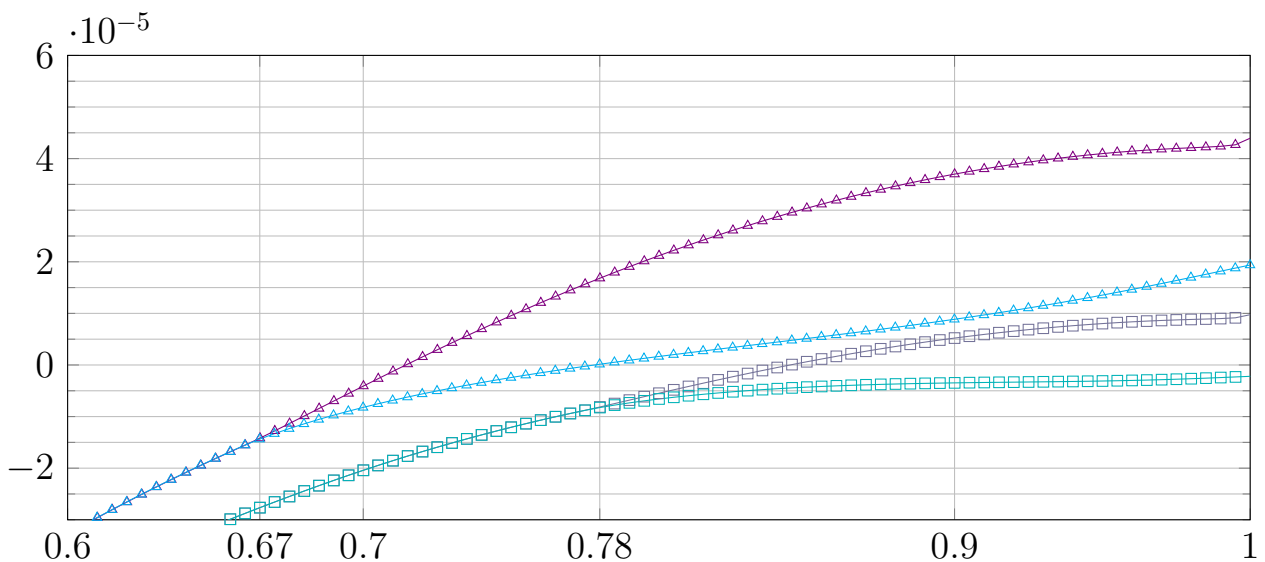


Рисунок 3.5 — Вид зоны контакта Γ_K в месте расхождения тел (при $h = \frac{1}{200}$).
Задача, учитывающая трение между телами

3.5.4 Результаты вычислительных экспериментов с обобщенным методом Ньютона для решения коэрцитивной задачи

Рассмотрим возможность применения обобщенного метода Ньютона для решения задачи минимизации на первом шаге алгоритма Удзавы. В статьях [86; 87] О. Мангасарьян показывает эффективность этого метода в задачах безусловной оптимизации кусочно-квадратичных функций. В работе [88] метод применяется для решения двойственной задачи линейного программирования с ограничениями-неравенствами.

Рассмотрим задачу, аналогичную (3.1)–(3.7), но в случае, когда оба тела имеют жесткое закрепление на части границы. С сохранением обозначений раздела 3.1 краевая постановка описывается соотношениями (3.56)–(3.61).

$$\sigma_{ij,j}^\alpha + F_i^\alpha = 0 \text{ в } \Omega^\alpha, \quad (3.56)$$

$$\sigma_{ij}^\alpha n_j^\alpha = P_i^\alpha \text{ на } \Gamma_\tau^\alpha, \quad (3.57)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_u^\alpha \subset \partial\Omega^\alpha, \quad (3.58)$$

$$u'_n + u''_n \leq 0, \quad \sigma'_n = \sigma''_n \leq 0, \text{ на } \Gamma_K, \quad (3.59)$$

$$(u'_n + u''_n)\sigma'_n = 0, \text{ на } \Gamma_K, \quad (3.60)$$

$$\sigma_\tau^\alpha = 0, \text{ на } \Gamma_K. \quad (3.61)$$

Функционал Лагранжа для этой задачи

$$M(v, l) = \frac{1}{2}A(v, v) - FP(v) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left(((l + r(v'_n + v''_n))^+)^2 - l^2 \right) ds$$

задан на множестве $V \times L_2(\Gamma_K)$, где $V = \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega) : v^\alpha = 0 \text{ на } \Gamma_u^\alpha\}$.

Численный эксперимент проводим на области, описанной в начале раздела 3.5, но с $\Gamma_u'' = \{(x, y) : x = 1, \frac{5}{6} \leq y \leq 1\}$ (рисунок 3.6). Как и ранее, триангуляцию области осуществляем с помощью равномерной сетки с шагом h ($n = 1/h + 1$). В каждом конечном элементе используем кусочно-линейные базисные функции, на которых строим линейную оболочку V_h .

Пусть I_K — множество индексов узлов, лежащих на Γ_K . Каждому такому узлу соответствуют два усеченных конечных элемента — для верхнего и для нижнего тела ($N = n^2 + n$ — общее число конечных элементов). В каждом из этих

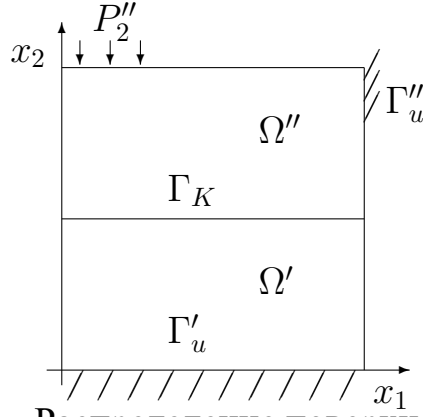


Рисунок 3.6 — Распределение поверхностной силы P_2''

конечных элементов своя пробная функция и свои значения $(v_i^{(1)}, v_i^{(2)})$. Выполним замену переменных $t_i = v_i^{(2)} - v_i^{(1)}$ (здесь для обоих тел нормаль на Γ_K считаем сонаправленной с осью Ox_2). Тогда $v_i^{(2)} = v_i^{(1)} + t_i$ для $i \in I_K$. Каждая переменная t_i в векторе $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}$ помещается на место $v_i^{(2)}$. Последнее слагаемое в $M(v, l)$ аппроксимируем по формуле трапеций: $\frac{h}{2r} \sum_{i \in I_K} (((l_i + rt_i)^+)^2 - l_i^2)$. Здесь и далее в разделе для обозначения векторов из \mathbb{R}^{2N} используется полужирный шрифт.

Получаем конечномерную задачу нахождения седловой точки функции:

$$\widehat{M}(\mathbf{v}, \mathbf{l}) = \frac{1}{2} \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{f}\mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle + \frac{h}{2r} (((\mathbf{l} + r\mathbf{v})^+)^2 - \mathbf{l}^2), \quad (3.62)$$

где $A_{2N \times 2N}$ — матрица жесткости (модифицированная с учетом замены переменных), $\mathbf{f}\mathbf{p}_{2N}$ — вектор нагрузки, \mathbf{l}_{2N} — двойственная переменная (у которой отличными от нуля могут быть только компоненты, соответствующие t_i).

У функции $\widehat{M}(\cdot, \cdot)$ недифференцируемый градиент

$$\nabla \widehat{M}(\mathbf{v}, \mathbf{l}) = A\mathbf{v} - \mathbf{f}\mathbf{p} + h(\mathbf{l} + r\mathbf{v})^+,$$

поэтому обычная матрица Гессе для неё не существует. Но можно определить обобщенную матрицу Гессе размера $2N \times 2N$ следующим образом:

$$H(\mathbf{v}, \mathbf{l}) = A + \text{diag}(0, \dots, 0, d_1, \dots, d_n, 0, \dots, 0),$$

$$\text{где } d_i = \begin{cases} rh, & \text{если } l_i + rv_i > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В таком случае обобщенный метод Ньютона имеет вид:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n - (H(\mathbf{v}^n, \mathbf{l}^n))^{-1} \nabla \widehat{M}(\mathbf{v}^n, \mathbf{l}^n).$$

Вообще, для квадратичной функции обычный метод Ньютона приводит к решению за одну итерацию из любой стартовой точки. В данном же случае обобщенная матрица Гессе зависит от стартовой точки и может измениться после

перехода к новому \mathbf{v}^{n+1} . Поэтому обобщенный метод Ньютона решает несколько задач с ложным минимумом, прежде чем привести к настоящему решению задачи.

В алгоритме 5 обобщенный метод Ньютона записан в строчках 2–6. Мы используем условие выхода $\max_i |v_i^{n+1} - v_i^n| \leq h \cdot \varepsilon$.

```

1 repeat
2   repeat
3      $\nabla \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{v}^n, \mathbf{l}^k) = A\mathbf{v}^n - \mathbf{fp} + h(\mathbf{I} + r\mathbf{v}^n)^+$ ;
4      $H(\mathbf{v}^n, \mathbf{l}^k) = A + \text{diag}(0, \dots, 0, d_1, \dots, d_n, 0, \dots, 0)$ ;
5      $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n - H^{-1} \nabla \widehat{\mathbf{M}}$ ;
6   until  $\max_i |v_i^{n+1} - v_i^n| \leq h \cdot \varepsilon$ ;
7    $\mathbf{l}^{k+1} = \mathbf{l}^k + r \max \{ \mathbf{v}^{n+1}, -\frac{\mathbf{l}^k}{r} \}$ ;
8 until  $\max_i |l_i^{k+1} - l_i^k| \leq \varepsilon$ ;

```

Алгоритм 5: Метод Удзавы совмещенный с обобщенным методом Ньютона

Данный алгоритм мы реализовали с использованием библиотеки cuBLAS. Она позволяет проводить параллельные вычисления с векторами и матрицами на графическом процессоре (в нашем случае это GeForce GTX 1050 Ti). Нахождение обратной матрицы большого размера в этой библиотеке реализуется последовательным выполнением двух функций: `cublasDgetrfBatched()` — предварительная LU-факторизация и `cublasDgetriBatched()` — нахождение обратной матрицы на основе ниже- и верхнетреугольных матриц L и U .

Вычисление обратной матрицы в алгоритме 5 — самая долгая операция. Более выгодным является предобусловливание матрицы A с помощью неполной LU-факторизации (ILU-разложения³) [89; 90]. При этом можно хранить матрицу в формате CSIR⁴, что в случае с разреженной матрицей очень экономит память.

Проведены расчеты для двух случаев (таблица 5) при $P_2'' = -500$ Н. Шаг триангуляции $h = \frac{1}{50}$, точность $\varepsilon = 10^{-5}$, параметр метода МФЛ $r = 10^{12}$. В обоих случаях внутренний цикл выполняет суммарно 9 итераций, в внешний цикл — три итерации. Время решения при этом 872 с.

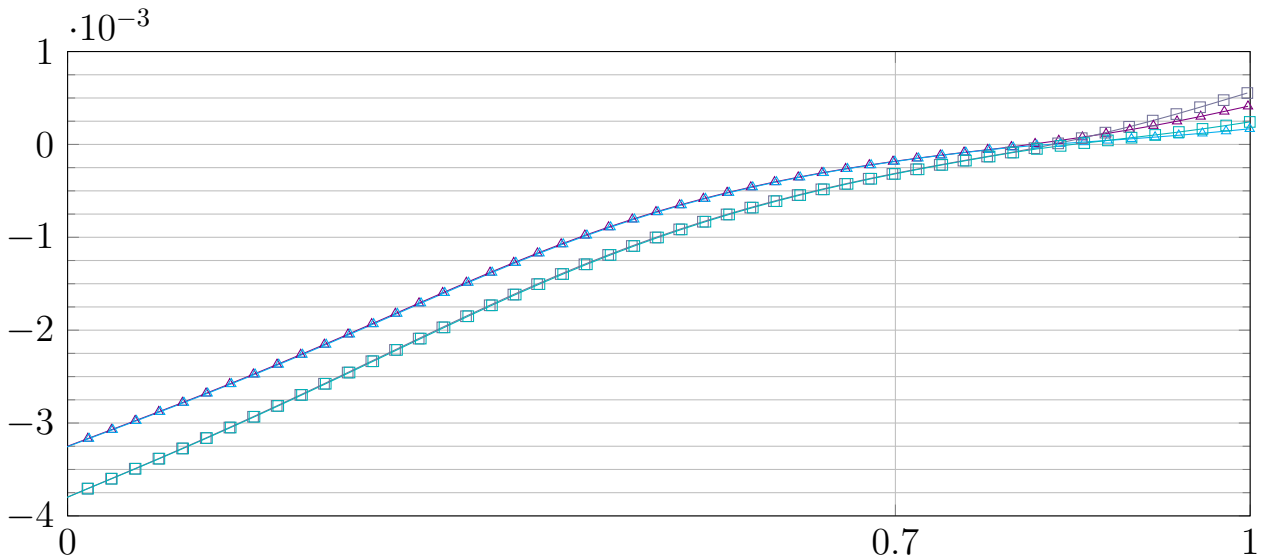
На рисунке 3.7 изображен вид зоны Γ_K . Ноль на оси Oy соответствует положению границы Γ_K в случае, когда на тела воздействуют нулевые силы.

³Incomplete Lower-Upper triangles decompozition.

⁴CSIR — Compressed Sparse (lower triangle) Row.

Таблица 5 — Параметры задач, решаемых обобщенным методом Ньютона

		Материал	E	μ	Обозначение
1	Ω''	алюминий	$70 \cdot 10^3$	0.34	\triangle
	Ω'				\triangle
2	Ω''	олово	$35 \cdot 10^3$	0.44	\square
	Ω'	алюминий	$70 \cdot 10^3$	0.34	\square

Рисунок 3.7 — Вид зоны контакта Γ_K в месте расхождения тел. Две задачи, решенные обобщенным методом Ньютона

Глава 4. Задача о теле, содержащем тонкий дефект с параметром

Цель данной главы — исследование возможности применения модифицированных функционалов Лагранжа для решения задачи о двумерном теле с дефектом, свойства которого характеризуются параметром разрушения. Это задача в перемещениях, с коэффициентами, учитывающими физические характеристики материалов тел.

4.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с липшицевой границей Γ (рисунок 4.1). В области имеется дефект $\overline{\gamma_0} \subset \Omega$, представляющий собой гладкую кривую без самопересечений. Обозначим: $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор нормали к γ_0 , $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ — касательный вектор, $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\gamma_0}$. Область Ω_0 представляет собой область, занятую эластичным материалом, γ_0 соответствует дефекту в материале.

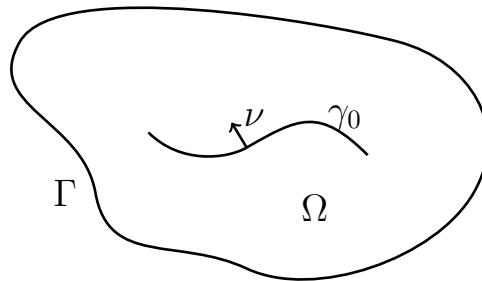


Рисунок 4.1 — Область с дефектом

Через $v = (v_1, v_2)$ обозначим векторное поле перемещений. Полагая перемещения малыми, определим компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(v) = a_{ijkl}\varepsilon_{km}(v)$, где $i, j, k, m = 1, 2$ и используется правило суммирования по повторяющимся индексам. Для компонент a_{ijkl} тензора упругости A выполняется свойство симметрии $a_{ijkl} = a_{jikm} = a_{kmi j}$, и существует такая константа $a_0 > 0$, что всюду в Ω_0 справедлива оценка $a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \geq a_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$ для любых ε_{ij} .

Краевая постановка задачи для тела Ω_0 и дефекта γ_0 формулируется следующим образом. Для данных объемных сил $f = (f_1, f_2) \in L_2(\Omega)^2$, действующих на тело, требуется найти поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}, i, j = 1, 2$, определенные в Ω_0 , — такие, что выполняется система равенств и неравенств:

$$-div \sigma = f, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \text{ в } \Omega_0, \quad (4.1)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (4.2)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad [\sigma_\tau] = 0 \text{ на } \gamma_0, \quad (4.3)$$

$$-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu] \geq 0, \quad -\sigma_\tau + \frac{1}{\delta}[u_\tau] = 0 \text{ на } \gamma_0, \quad (4.4)$$

$$[u_\nu](-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]) = 0 \text{ на } \gamma_0. \quad (4.5)$$

Здесь $[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$ — скачок функции φ на γ_0 , обозначение φ^\pm используется для следов функции φ на берегах дефекта γ_0^\pm . Знаки \pm соответствуют положительному и отрицательному направлениям вектора нормали ν . $\sigma_\nu = (\sigma_{1j}, \sigma_{2j})$, $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_i\nu_j$, $\sigma_\tau = \sigma_\nu \cdot \tau$, $u_\nu = u\nu$, $u_\tau = u\tau$.

Соотношения (4.1) представляют собой уравнение равновесия для упругого тела и закон Гука. Для простоты на внешней границе Γ задано условие закрепления (4.2), в целом же результаты справедливы и для условий типа Синьорини. Первое неравенство в (4.3) накладывает запрет на проникновение берегов дефекта друг в друга. Если в некоторой точке $x_0 \in \gamma_0$ нет контакта берегов, т.е. $[u_\nu] > 0$, то из (4.5) следует, что $-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu] = 0$ в этой точке. С другой стороны, если $-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu] > 0$, то контакт есть $[u_\nu] = 0$.

Параметр разрушения $\delta > 0$ описывает свойства дефекта. В работе [91], где описывается данная модель, проводится анализ задачи при фиксированном δ и при $\delta \rightarrow 0, \infty$. Крайний случай при $\delta \rightarrow 0$ соответствует задаче без дефекта. При $\delta \rightarrow \infty$ задача превращается в задачу с трещиной, описанную в [38]. Численное моделирование данной задачи можно найти в [92] и с использованием модифицированных функционалов Лагранжа в [21].

Задача (4.1)–(4.5) представима в вариационном виде. Для этого введем пространство

$$H_\Gamma^1(\Omega_0) = \{v \in H^1(\Omega_0) : v = 0 \text{ на } \Gamma\}$$

и функционал энергии

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \sigma(v)\varepsilon(v) d\Omega - \int_{\Omega_0} f v d\Omega + \frac{1}{2\delta} \int_{\gamma_0} [v]^2 ds.$$

Для упрощения записей здесь и далее (где это не приводит к недоразумению) будем использовать обозначения типа $H_{\Gamma}^1(\Omega_0)$ вместо $H_{\Gamma}^1(\Omega_0)^2$. Кроме того, свертку тензоров $\sigma_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)$ обозначим через $\sigma(v)\varepsilon(v)$, а $fv = f_iv_i$.

Пусть K_0 — множество допустимых перемещений:

$$K_0 = \{v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_0) : [v_{\nu}] \geq 0 \text{ на } \gamma_0\},$$

которое, очевидно, является выпуклым. В таком случае рассматриваемая задача представима в виде задачи минимизации функционала

$$\inf_{v \in K_0} \Pi(v). \quad (4.6)$$

Она имеет единственное решение $u \in K_0$, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$\int_{\Omega_0} \sigma(u)\varepsilon(v-u) d\Omega - \int_{\Omega_0} f(v-u) d\Omega + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma_0} [u][v-u] ds \geq 0 \quad \forall v \in K_0. \quad (4.7)$$

4.2 Разрешимость и единственность задачи

Предположим, что дефект γ_0 можно продолжить так, что область Ω_0 разделится на две подобласти — D_1 и D_2 , с границами ∂D_1 и ∂D_2 соответственно, класса $C^{0,1}$, причем $meas(\partial D_i \cap \Gamma) > 0$, $i = 1, 2$. В этом случае для функций из пространства $H^1(D_i)$, равных нулю на $\partial D_i \cap \Gamma$, справедливо первое неравенство Корна, так что оно будет справедливо и в области Ω_0 для функций из пространства $H^1(\Omega_0)$, равных нулю на Γ .

Используя положительную определенность тензора модулей упругости и первое неравенство Корна для функций из $H_{\Gamma}^1(\Omega_0)$, имеем:

$$\int_{\Omega_0} \sigma(v)\varepsilon(v) d\Omega \geq a_0 \int_{\Omega_0} \varepsilon(v)\varepsilon(v) d\Omega \geq C_1 \|v\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_0)}^2.$$

Поскольку $f \in L_2(\Omega_0)$ и третье слагаемое в $\Pi(\cdot)$ неотрицательно, приходим к заключению, что функционал $\Pi(\cdot)$ коэрцитивен:

$$\Pi(v) \geq \frac{C_0}{2} \|v\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_0)}^2 - C_2 \|v\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_0)}^2.$$

Функционал $\Pi(\cdot)$ является также слабо полунепрерывным снизу на пространстве $H_{\Gamma}^1(\Omega_0)$, так как он непрерывный и выпуклый. Заметим далее, что если

$$v^n \in K_0, v^n \rightarrow v \text{ сильно в } H_{\Gamma}^1(\Omega_0),$$

то по теореме вложения получаем

$$[v^n] \rightarrow [v] \text{ и } [v_{\nu}^n] \rightarrow [v_{\nu}] \text{ п.в. на } \gamma_0.$$

Поскольку $[v_{\nu}^n] \geq 0$ п.в. на γ_0 , получим, что $[v_{\nu}] \geq 0$ п.в. на γ_0 . Таким образом, множество K_0 — замкнутое, а в силу его выпуклости — слабо замкнутое. Этого достаточно для существования и единственности решения задачи.

4.3 Метод решения

Для решения рассматриваемой задачи применим схему двойственности, основанную на модифицированном функционале Лагранжа. Это позволит снять ограничение $[v_{\nu}] \geq 0$ и проводить минимизацию функционала $\Pi(\cdot)$ на всем пространстве $H_{\Gamma}^1(\Omega_0)$.

4.3.1 Классический функционал Лагранжа

Классический функционал Лагранжа для данной задачи:

$$L(v, l) = \Pi(v) - \int_{\gamma_0} l[v_{\nu}] ds.$$

Определение 4. Пара $(v^*, l^*) \in H_{\Gamma}^1(\Omega_0) \times L_2(\gamma_0)^+$ называется седловой точкой функционала $L(\cdot, \cdot)$, если

$$L(v^*, l) \leq L(v^*, l^*) \leq L(v, l^*) \quad \forall v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_0), \forall l \in L_2(\gamma_0)^+.$$

Через $L_2(\gamma_0)^+$ здесь обозначен конус неотрицательных функций из $L_2(\gamma_0)$.

Лемма 2. Если решение u задачи (4.6) принадлежит пространству $H^2(\Omega_0)$, тогда для всех $v \in H_1^1(\Omega_0)$ справедливо равенство

$$a(u, v - u) - (f, v - u) + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma_0} [u][v - u] ds - \int_{\gamma_0} [v_\nu](-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]) ds = 0. \quad (4.8)$$

Доказательство. Для начала покажем справедливость равенства

$$\int_{\gamma_0} [\sigma_{ij}(u)\nu_j(v_i - u_i)] ds - \frac{1}{\delta} \int_{\gamma_0} [u][v - u] ds = - \int_{\gamma_0} (-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu])[v_\nu] ds. \quad (4.9)$$

Так как u является решением и краевой задачи, то скачки напряжения на γ_0 равны нулю $[\sigma_\nu(u)] = 0$, $[\sigma_\tau(u)] = 0$, поэтому

$$\int_{\gamma_0} [\sigma_{ij}(u)\nu_j(v_i - u_i)] ds = \int_{\gamma_0} \sigma_\nu(u)[v_\nu - u_\nu] ds + \int_{\gamma_0} \sigma_\tau(u)[v_\tau - u_\tau] ds.$$

Для краткости далее используем обозначения $\sigma_\nu = \sigma_\nu(u)$ и $\sigma_\tau = \sigma_\tau(u)$.

Воспользовавшись предыдущим равенством, распишем разность:

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_0} [\sigma_{ij}(u)\nu_j(v_i - u_i)] ds - \frac{1}{\delta} \int_{\gamma_0} [u][v - u] ds = \\ &= \int_{\gamma_0} \sigma_\nu[v_\nu - u_\nu] ds + \int_{\gamma_0} \sigma_\tau[v_\tau - u_\tau] ds - \frac{1}{\delta} \int_{\gamma_0} [u_\nu][v_\nu - u_\nu] ds - \frac{1}{\delta} \int_{\gamma_0} [u_\tau][v_\tau - u_\tau] ds = \\ &= \int_{\gamma_0} (\sigma_\nu - \frac{1}{\delta}[u_\nu])[v_\nu - u_\nu] ds + \int_{\gamma_0} (\sigma_\tau - \frac{1}{\delta}[u_\tau])[v_\tau - u_\tau] ds. \end{aligned}$$

Второй интеграл здесь равен нулю в силу краевого условия из (4.4). Распишем скачок разности $[v_\nu - u_\nu]$ и применим краевое условие (4.5)

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_0} [\sigma_{ij}(u)\nu_j(v_i - u_i)] ds - \frac{1}{\delta} \int_{\gamma_0} [u][v - u] ds = \\ &= \int_{\gamma_0} (\sigma_\nu - \frac{1}{\delta}[u_\nu])[v_\nu] ds - \int_{\gamma_0} (\sigma_\nu - \frac{1}{\delta}[u_\nu])[u_\nu] ds = - \int_{\gamma_0} (-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu])[v_\nu] ds. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к равенству (4.9).

Теперь покажем справедливость утверждения леммы. Возьмем первое уравнение из (4.1), умножим обе части на $(v - u)$, где $v \in H_1^1(\Omega_0)$, и проинтегрируем по области Ω_0 . Имеем

$$- \int_{\Omega_0} \operatorname{div} \sigma(u)(v - u) d\Omega = \int_{\Omega_0} f(v - u) d\Omega.$$

Применим формулу интегрирования по частям. Интеграл по внешней границе равен нулю в силу условия (4.2):

$$\int_{\Omega_0} \sigma(u) \varepsilon(v-u) d\Omega - \int_{\Omega_0} f(v-u) d\Omega + \int_{\gamma_0} [\sigma_{ij}(u) \nu_j (v_i - u_i)] ds = 0.$$

Заменим третье слагаемое, воспользовавшись (4.9), что и приводит к доказываемому выражению (4.8). \square

Теорема 21. Если решение u задачи (4.6) принадлежит пространству $H^2(\Omega_0)$, то классический функционал Лагранжа $L(\cdot, \cdot)$ обладает седловой точкой $(u, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu])$ на $H_\Gamma^1(\Omega_0) \times (L_2(\gamma_0))^+$, т. е.:

$$L(u, l) \leq L(u, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]) \leq L(v, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]) \quad \forall (v, l) \in H_\Gamma^1(\Omega_0) \times (L_2(\gamma_0))^+.$$

Доказательство. Функция u является и решением краевой задачи (4.1)–(4.5), поэтому выполняются соотношения $[u_\nu] \geq 0$, $-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu] \geq 0$, $[u_\nu] \cdot (-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]) = 0$. Получаем левую часть неравенства седловой точки

$$\begin{aligned} L(u, l) &= \Pi(u) - \int_{\gamma_0} l[u_\nu] ds \leq \Pi(u) = \\ &= \Pi(u) - \int_{\gamma_0} (-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]) \cdot [u_\nu] ds = L(u, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]). \end{aligned}$$

Чтобы показать выполнение правой части неравенства седловой точки, покажем неотрицательность разности

$$\begin{aligned} &L(v, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]) - L(u, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]) = \\ &= \Pi(v) - \Pi(u) - \int_{\gamma_0} (-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu])[v_\nu] ds + \int_{\gamma_0} (-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu])[u_\nu] ds = \\ &= \frac{1}{2}(a(v, v) - a(u, u)) - (f, v-u) + \frac{1}{2\delta} \int_{\gamma_0} ([v]^2 - [u]^2) ds - \int_{\gamma_0} (-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu])[v_\nu] ds = \\ &= a(u, v-u) + \frac{1}{2}a(v-u, v-u) - (f, v-u) + \\ &+ \frac{1}{\delta} \int_{\gamma_0} [u][v-u] ds + \frac{1}{2\delta} \int_{\gamma_0} [v-u]^2 ds - \int_{\gamma_0} (-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu])[v_\nu] ds. \end{aligned}$$

Здесь второе и пятое слагаемые неотрицательны, а сумма остальных равна нулю в силу леммы (4.8). Таким образом, исходная разность неотрицательна, что означает истинность правого неравенства для седловой точки. \square

4.3.2 Модифицированный функционал Лагранжа

Модифицированный функционал Лагранжа для задачи (4.6) имеет вид

$$M(v, l) = \Pi(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma_0} \left(((l - r[v_\nu])^+)^2 - l^2 \right) ds.$$

Здесь $(l - r[v_\nu])^+ = \max\{0, l - r[v_\nu]\}$. Параметр двойственности $r > 0$ может оставаться неизменным либо меняться в определенных пределах, в отличие от метода штрафов, в котором аналогичный параметр неограниченно возрастает.

Теорема 22. *Если решение u задачи (4.6) принадлежит пространству $H^2(\Omega_0)$, то модифицированный функционал Лагранжа $M(\cdot, \cdot)$ обладает седловой точкой $(u, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu])$ на $H_\Gamma^1(\Omega_0) \times L_2(\gamma_0)$, т. е.:*

$$M(u, l) \leq M(u, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]) \leq M(v, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]) \quad \forall (v, l) \in H_\Gamma^1(\Omega_0) \times L_2(\gamma_0).$$

Доказательство осуществляется аналогично доказательству теоремы 8 из главы 2 с опорой на теорему 21.

Для поиска седловой точки $M(\cdot, \cdot)$ используется алгоритм Удзавы, который записывается следующим образом:

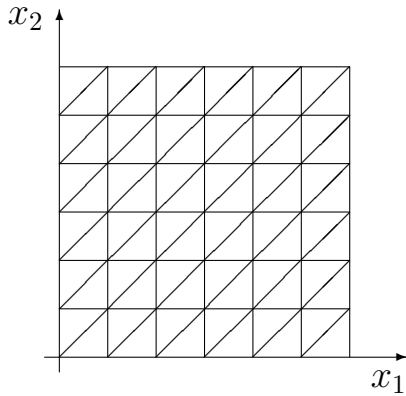
$$\begin{aligned} (i) \quad u^{k+1} &= \operatorname{argmin}_{v \in H_\Gamma^1(\Omega_0)} M(v, l^k), \\ (ii) \quad l^{k+1} &= (l^k - r[u_\nu^{k+1}])^+. \end{aligned} \tag{4.10}$$

4.4 Аппроксимация задачи и сходимость метода конечных элементов

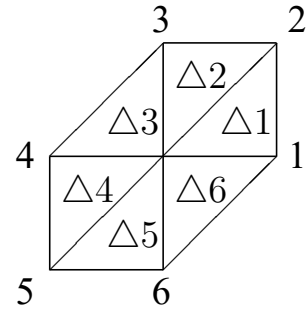
Пусть моделируемое тело Ω является квадратом; дефект γ_0 представляет собой прямолинейный отрезок, параллельный оси Ox_1 . Нормальный и касательный векторы на γ_0 сонаправлены с координатными осями: $\nu = (0, 1)$, $\tau = (1, 0)$.

Триангуляцию области осуществим с помощью равномерной сетки (рисунк 4.2) из равнобедренных прямоугольных треугольников с диагональю h . Для большинства узлов связанные с ними конечные элементы состоят из шести прилегающих к ним треугольников. В каждом конечном элементе используются кусочно-линейные базисные функции $\varphi(x_1, x_2)$, на которых строится линейная

оболочка V^h , аппроксимирующая пространство $H^1_\Gamma(\Omega_0) = \{v \in H^1(\Omega_0) : v_1 = v_2 = 0 \text{ на } \Gamma\}$ [93, с.110].



а) Разбиение области



б) Обозначение узлов конечного элемента

Рисунок 4.2 — Триангуляция T_h

Каждому узлу, лежащему на γ_0 , соответствуют два усеченных конечных элемента (для верхнего и для нижнего берегов). Соответственно в каждом из этих конечных элементов своя базисная функция и свои значения $(v_i^{(1)}, v_i^{(2)})$, где нижний индекс — номер конечного элемента (а не узла), а верхнее число в скобках — номер компоненты вектора. Пусть всего имеется n конечных элементов и $2n$ компонент вектора \mathbf{v} , описывающего функцию $v_h = (v_h^{(1)}, v_h^{(2)})$ из линейной оболочки V^h :

$$v_h^{(1)}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \varphi_i(x_1, x_2), \quad v_h^{(2)}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{(n+i)} \varphi_i(x_1, x_2).$$

Сформулируем задачу об отыскании приближенного решения. Пусть K_0^h — пересечение множеств K_0 и V^h . Тогда конечно-элементным решением задачи (4.6) будет функция

$$u_h = \operatorname{argmin}_{v_h \in K_0^h} \Pi(v_h),$$

удовлетворяющая также вариационному неравенству

$$\int_{\Omega_0} \sigma(u_h) \varepsilon(v_h - u_h) d\Omega - \int_{\Omega_0} f(v_h - u_h) d\Omega + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma_0} [u_h][v_h - u_h] ds \geq 0 \quad \forall v_h \in K_0^h.$$

Для компактности записей далее будем использовать обозначения

$$a(v, w) = \int_{\Omega_0} \sigma(v) \varepsilon(w) d\Omega, \quad (f, v) = \int_{\Omega_0} f v d\Omega.$$

Теорема 23. Пусть Ω — прямоугольная область в \mathbb{R}^2 , $f \in L_2(\Omega)$, решение исходной задачи $u \in H_{\Gamma}^2(\Omega_0)$. Тогда имеет место оценка

$$\|u_h - u\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_0)}^2 \leq C'h\|u\|_{H^2(\Omega_0)} + C''h^2\|u\|_{H^2(\Omega_0)}^2,$$

где константы C', C'' не зависят от h .

Доказательство. Пусть $u_I \in V^h$ — кусочно-линейное восполнение решения u исходной задачи (4.6). В силу того, что трещина прямолинейна, для $u \in K_0$ гарантируется, что $u_I \in K_0^h$. Тогда для u^h будет справедливо неравенство

$$\Pi(u_h) \leq \Pi(u_I),$$

$$\Pi(u_h) - \Pi(u) \leq \Pi(u_I) - \Pi(u). \quad (4.11)$$

Очевидно, что разность $\Pi(u_h) - \Pi(u)$ представима в виде

$$\begin{aligned} \Pi(u_h) - \Pi(u) &= a(u, u_h - u) - (f, u_h - u) + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma_0} [u][u_h - u] ds + \\ &+ \frac{1}{2} a(u_h - u, u_h - u) + \frac{1}{2\delta} \int_{\gamma_0} [u_h - u]^2 ds. \end{aligned}$$

Поскольку в этом представлении u — решение задачи, то в силу вариационного неравенства (4.7) сумма первых трех слагаемых неотрицательна. Тогда из неравенства (4.11) получим

$$\frac{1}{2} a(u_h - u, u_h - u) \leq \Pi(u_I) - \Pi(u).$$

Для оценки левой части в последнем неравенстве используем положительную определенность тензора модулей упругости и первое неравенство Корна для функций из $H_{\Gamma}^1(\Omega_0)$:

$$C_1 \|u_h - u\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_0)}^2 \leq \Pi(u_I) - \Pi(u).$$

Аналогично преобразуем разность в правой части последнего неравенства и первые три слагаемых обозначим как линейный функционал $L(u_I - u) = a(u, u_I - u) - (f, u_I - u) + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma_0} [u][u_I - u] ds$. Приходим к неравенству:

$$C_1 \|u_h - u\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_0)}^2 \leq L(u_I - u) + \frac{1}{2} a(u_I - u, u_I - u) + \frac{1}{2\delta} \int_{\gamma_0} [u_I - u]^2 ds \leq$$

$$\leq \|L\| \|u_I - u\|_{H^1(\Omega_0)} + \|A\| \|u_I - u\|_{H^1(\Omega_0)}^2 + \frac{1}{2\delta} \int_{\gamma_0} [u_I - u]^2 ds.$$

В силу вложения пространств имеем $\frac{1}{2\delta} \int_{\gamma_0} [u_I - u]^2 d\Gamma \leq C_2 \|u_I - u\|_{H^1(\Omega_0)}^2$, поэтому получаем

$$C_1 \|u_h - u\|_{H^1_\Gamma(\Omega_0)}^2 \leq C_3 \|u_I - u\|_{H^1(\Omega_0)} + C_4 \|u_I - u\|_{H^1(\Omega_0)}^2. \quad (4.12)$$

Согласно теореме 1 из [93, с. 112], для кусочно-линейного восполнения функций из H^2 можно дать следующую оценку

$$\|u_I - u\|_{H^1(\Omega_0)} \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega_0)}. \quad (4.13)$$

Применив данное неравенство к слагаемым правой части неравенства (4.12), окончательно получаем требуемую оценку точности аппроксимации задачи:

$$\|u_h - u\|_{H^1_\Gamma(\Omega_0)}^2 \leq C' h \|u\|_{H^2(\Omega_0)} + C'' h^2 \|u\|_{H^2(\Omega_0)}^2.$$

□

Представленная выше теорема позволяет при достаточно малых $h < 1$ дать следующую оценку точности приближенных решений задачи

$$\|u_h - u\|_{H^1_\Gamma(\Omega_0)} \leq Ch^{1/2}.$$

Можно перейти к более общему случаю, когда область Ω — выпуклый многоугольник. В таком случае не получится построить равномерную сетку, поэтому триангуляция будет характеризоваться двумя параметрами — минимальным из внутренних углов всех треугольников θ_0 и максимальной из сторон h . Если рассматривать систему триангуляций при $h \rightarrow 0$, являющуюся регулярной, то её можно характеризовать только одним параметром $h > 0$ [7, с. 24]. В таком случае можно получить результаты, аналогичные теореме 23, сославшись вместо (4.13) на теорему 2 из [93, с. 120].

4.5 Алгоритм Удзавы и обобщенный метод Ньютона

Будем использовать следующие обозначения: n — количество всех узлов триангуляции, n_γ — количество узлов на дефекте γ . Так как область является многоугольником, то обеспечено вложение пространств $V^h \subset H^1(\Omega_\gamma)$.

Для граничных интегралов на дефекте выполняем численное интегрирование по квадратурной формуле трапеций. Обозначим: $\tilde{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ — матрица жесткости, $F = (f_i) \in \mathbb{R}^{2n}$ — вектор-столбец правых частей. Определим целевой вектор $t = (t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{2n})$ — приближённое решение для поля перемещений в узлах сетки и $\alpha^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_{n_\gamma}^k)$ — приближение двойственной переменной l^k .

Для решения задачи минимизации конечномерной функции $\widehat{M}(t, \alpha)$ на первом шаге алгоритма Удзавы используем обобщенный метод Ньютона. Для этого необходимо вычислить градиент и обобщенный гессиан. Градиент $g(t)$, соответствующий функции $\widehat{M}(t, \alpha)$, принимает вид

$$g(t) = \tilde{A}t - F + \beta(t).$$

Для удобства при $j = \overline{1, n_\gamma}$ введем обозначения: i_j^+, i_j^- — номера узлов, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегу дефекта, $\lambda_j = \alpha_j^k - r(t_{i_j^+ + n} - t_{i_j^- + n})$, $(\lambda_j)^+ = \max\{0, \lambda_j\}$. Тогда коэффициенты вектора $\beta(t) = (b_i) \in \mathbb{R}^{2n}$ вычисляются следующим образом:

$$b_i(t) = \begin{cases} \frac{h}{\delta} \cdot t_{i_j^+}, & i \in \{i_j^+ : j = \overline{1, n_\gamma}\}, \\ -\frac{h}{\delta} \cdot t_{i_j^-}, & i \in \{i_j^- : j = \overline{1, n_\gamma}\}, \\ \frac{h}{\delta} \cdot t_{i_j^+ + n} - h \cdot (\lambda_j)^+, & i \in \{i_j^+ + n : j = \overline{1, n_\gamma}\}, \\ -\frac{h}{\delta} \cdot t_{i_j^- + n} + h \cdot (\lambda_j)^+, & i \in \{i_j^- + n : j = \overline{1, n_\gamma}\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Гессиан $\partial g(t)$ вычисляется по формуле:

$$\partial g(t) = \tilde{A} + D(t),$$

где $D(t) = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ — симметричная разреженная матрица. Для касательных компонент целевого вектора коэффициенты матрицы принимают вид:

$$d_{i_j^+, i_j^+} = \frac{h}{\delta}, \quad d_{i_j^+, i_j^-} = -\frac{h}{\delta}, \quad d_{i_j^-, i_j^+} = -\frac{h}{\delta}, \quad d_{i_j^-, i_j^-} = \frac{h}{\delta};$$

для нормальных компонент при условии, что $\lambda_j > 0$:

$$d_{i_j^+ + n, i_j^+ + n} = \frac{h}{\delta} + hr, \quad d_{i_j^+ + n, i_j^- + n} = -\frac{h}{\delta} - hr, \\ d_{i_j^- + n, i_j^+ + n} = -\frac{h}{\delta} - hr, \quad d_{i_j^- + n, i_j^- + n} = \frac{h}{\delta} + hr,$$

если $\lambda_j < 0$, то

$$d_{i_j^++n, i_j^++n} = \frac{h}{\delta}, \quad d_{i_j^++n, i_j^-+n} = -\frac{h}{\delta}, \quad d_{i_j^-+n, i_j^++n} = -\frac{h}{\delta}, \quad d_{i_j^-+n, i_j^-+n} = \frac{h}{\delta},$$

Алгоритм обобщенного метода Ньютона применительно к поставленной задаче при выбранных обозначениях запишется следующим образом:

1. Задается начальное значение t^0 .
2. Для каждого $m = 0, 1, 2, \dots$ последовательно вычисляется

$$t^{m+1} = t^m - s_m (\partial g(t^m))^{-1} g(t^m),$$

где s_m – шаг сдвига, в простейших случаях равный единице.

3. Проверяется условие

$$\frac{\|t^{m+1} - t^m\|_{V^h}}{\|t^{m+1}\|_{V^h}} < 10^{-7}.$$

Из-за положительной срезки в последнем слагаемом минимизируемой функции её вторая производная не является непрерывной. Поэтому, несмотря на то, что функция квадратичная, метод Ньютона не приводит к решению за одну итерацию. По сути, выполнив один шаг этого метода, можно получить новую задачу с другим минимумом. Чтобы добиться гарантированного уменьшения значения функции, будем выполнять дробление шага s до тех пор, пока не выполнится условие Армихо. Затем выполняется один шаг метода Ньютона. На внутренних итерациях обобщенного метода Ньютона (шаг 2) выполняется следующая процедура:

- 2.1) задается $s = 1$;
- 2.2) вычисляется направление сдвига $d^m = (\partial g(t^m))^{-1} g(t^m)$;
- 2.3) вычисляется $t^{m+1} = t^m - s \cdot d^m$;
- 2.4) если $\widehat{M}(t^{m+1}, \alpha) < \widehat{M}(t^m, \alpha) + s \cdot \langle \nabla \widehat{M}(t^m, \alpha), d^m \rangle$, заканчиваем;
- 2.5) иначе $s = s/2$ и переход на 2.3.

На втором шаге метода Удзавы находим новое значение двойственной переменной:

$$\alpha_j^{k+1} = (\lambda_j)^+, \quad j = \overline{1, n_\gamma}.$$

Критерий остановки для метода Удзавы — выполнение условия:

$$\max_j |\alpha_j^{k+1} - \alpha_j^k| \leq 10^{-5}.$$

4.6 Результаты вычислительных экспериментов

Численные расчеты проведены для случая, когда Ω представляет собой единичный квадрат, а дефект $\gamma_0 = \{(x_1, x_2): \frac{1}{4} < x_1 < \frac{3}{4}, x_2 = \frac{1}{2}\}$. Модуль упругости Юнга $E = 69000$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Параметр $r = 10^7$. Остальные параметры изменялись. Для наглядности условие закрепления (4.2) на всей внешней границе заменено закреплением на нижней стороне тела $\Gamma_u = \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega: x_2 = 0\}$, а вместо объемных сил использованы поверхностные к верхней стороне тела $\Gamma_f = \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega: x_2 = 1\}$.

Рассмотрены три варианта распределения силы:

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} -3 \text{ Н}, & (x_1, x_2) \in \Gamma_f, \\ 0 \text{ Н}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} -10 \text{ Н}, & (x_1, x_2) \in \Gamma_f, x_1 < \frac{1}{2}, \\ +10 \text{ Н}, & (x_1, x_2) \in \Gamma_f, x_1 > \frac{1}{2}, \\ 0 \text{ Н}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$f_3(x_1, x_2) = \begin{cases} +3 \text{ Н}, & (x_1, x_2) \in \Gamma_f, \\ 0 \text{ Н}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

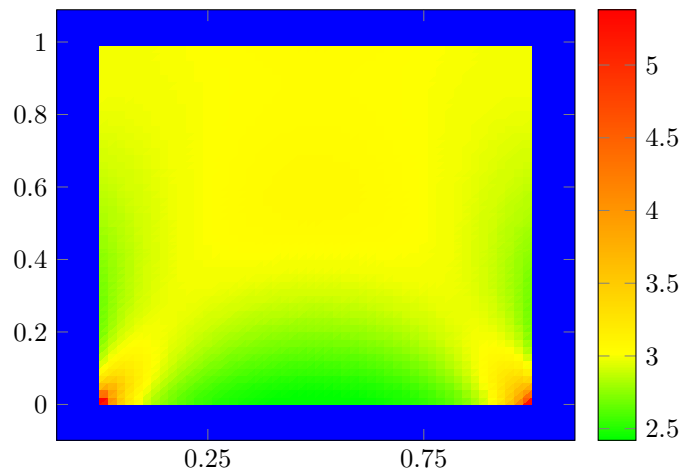
Для каждого из них проведены тесты при разных значениях параметра δ . Количество итераций метода Удзавы ($k_{МУ}$) и количество метода Ньютона ($m_{МН}$) представлено в таблице 6. На серии рисунков 4.3–4.5 продемонстрировано деформированное состояние тела в лагранжевых координатах с увеличивающимся коэффициентом 300 по обеим осям ($x + 300 \cdot u(x)$). Цветом показано распределение напряжений Мизеса — второго инварианта тензора напряжений.

Для задач с f_1 естественно, что берега дефекта остаются полностью сомкнутыми. В таком случае слагаемые с $\beta(t)$ практически всегда остаются нулевыми и не оказывают влияния на решение, а параметр δ фигурирует лишь в них. Таким образом, в подобных задачах δ не влияет на решение. Но при некоторых распределениях нагрузки может оказаться отличной от нуля касательная составляющая скачка. Деформированное состояние представлено на рисунке 4.3.

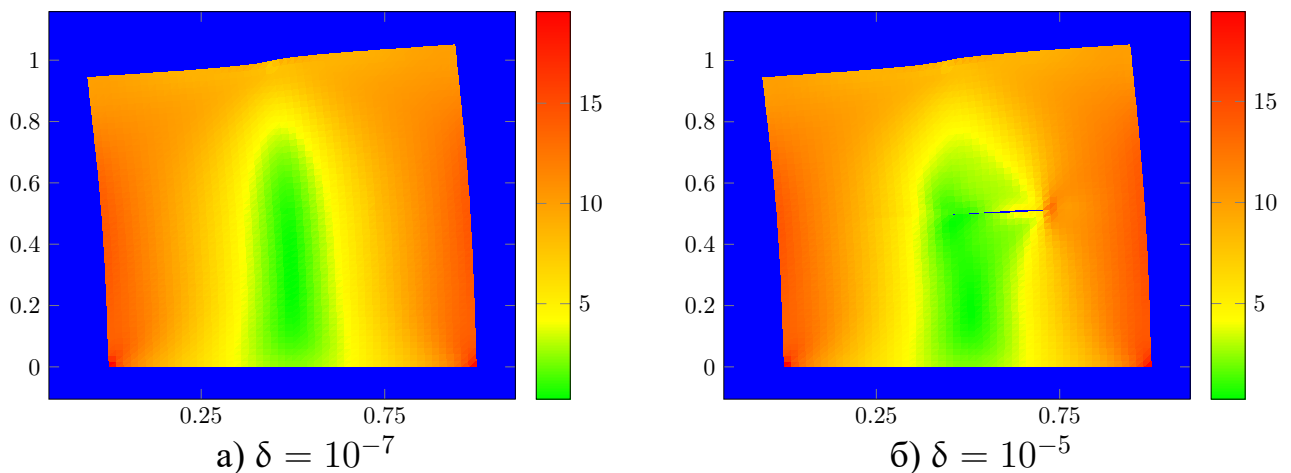
Задача с f_2 наиболее интересна, поскольку силы здесь выбраны так, чтобы слипание берегов происходило лишь на части дефекта. При небольшом значении

Таблица 6 — Количество итераций (для f_1, f_2, f_3 при разных δ)

	$\delta = 10^{-7}$	$\delta = 10^{-5}$	$\delta = 10^{-1}$
f_1	$k_{\text{МУ}} = 18$ $m_{\text{МН}} = 24$	$k_{\text{МУ}} = 22$ $m_{\text{МН}} = 33$	$k_{\text{МУ}} = 23$ $m_{\text{МН}} = 28$
f_2	$k_{\text{МУ}} = 22$ $m_{\text{МН}} = 24$	$k_{\text{МУ}} = 11$ $m_{\text{МН}} = 16$	$k_{\text{МУ}} = 19$ $m_{\text{МН}} = 24$
f_3	$k_{\text{МУ}} = 1$ $m_{\text{МН}} = 2$	$k_{\text{МУ}} = 1$ $m_{\text{МН}} = 2$	$k_{\text{МУ}} = 1$ $m_{\text{МН}} = 2$

Рисунок 4.3 — Деформированное состояние для задачи с f_1

параметра δ дефект практически отсутствует (рисунок 4.4а), при большем происходит переход к задаче с трещиной, и на рисунок 4.4б можно увидеть появление концентратора напряжений. При ещё больших значениях параметра разрушения получается решение задачи с трещиной (рисунок 4.5).

Рисунок 4.4 — Деформированное состояние для задачи с f_2

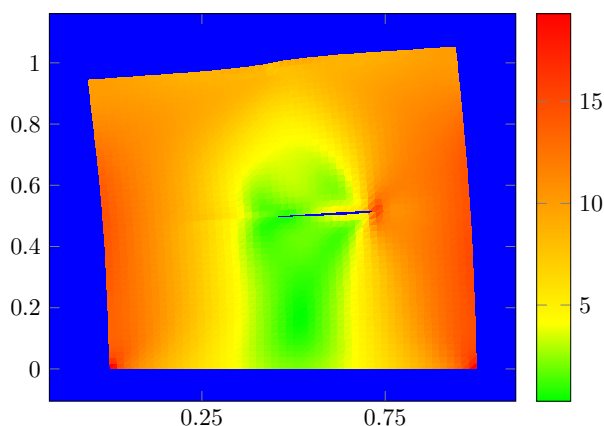


Рисунок 4.5 — Деформированное состояние для задачи с f_2 при $\delta = 10^{-1}$

На рисунке 4.6 можно отметить значения скачка нормальной составляющей вектора перемещения на дефекте при воздействии f_2 для тел с разным параметром разрушения. По вертикальной оси используется масштабирующий коэффициент 10^{-5} . Здесь хорошо видно, что на части дефекта берега остались слившимися. На рисунке 4.7 представлена форма дефекта и его расположение относительно исходного положения на уровне $x_2 = \frac{1}{2}$. Линии \triangleleft и \triangleleft соответствуют верхнему и нижнему берегу дефекта при $\delta = 10^{-1}$, а линии \square и \square берегам при $\delta = 10^{-5}$. Ориентироваться на масштаб по вертикальной оси можно по рисунку 4.6.

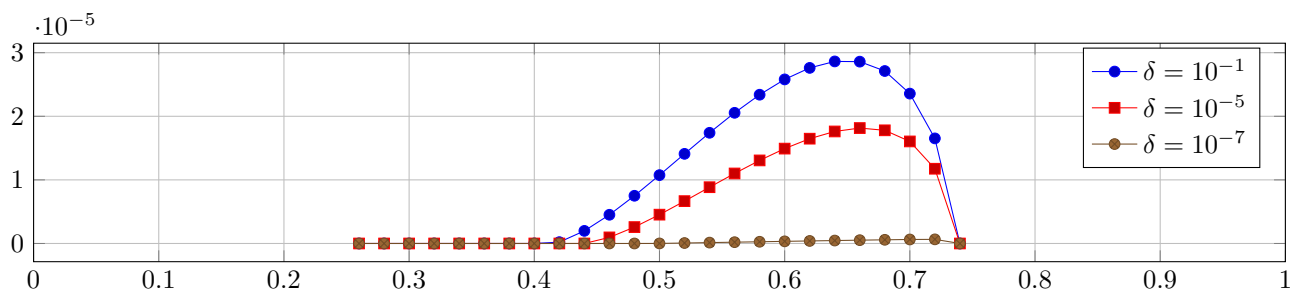


Рисунок 4.6 — Скачок в задачах с f_2 (при разных значениях δ)

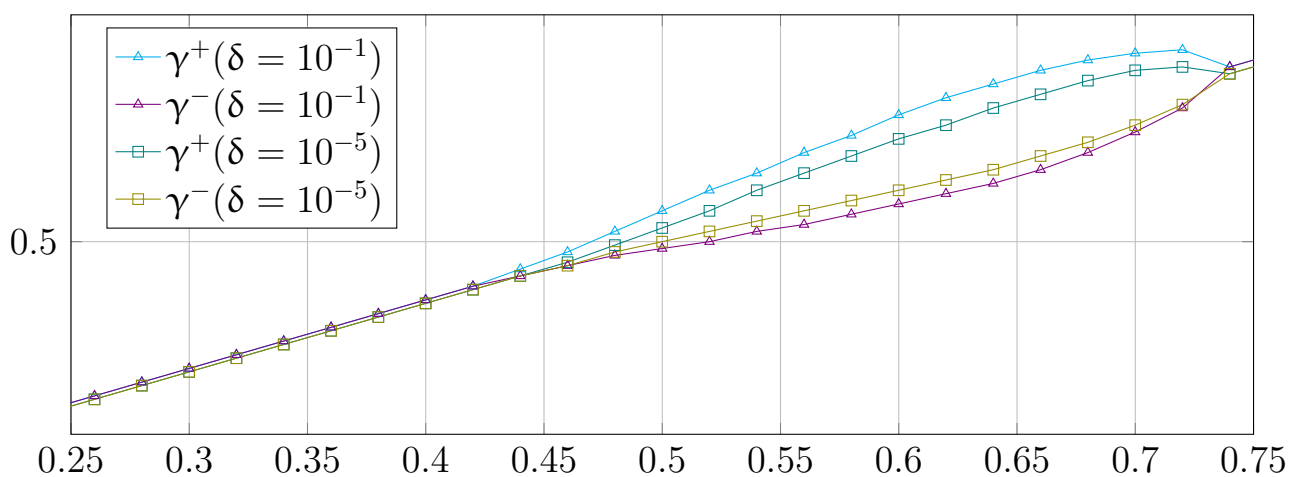


Рисунок 4.7 — Форма дефекта в задачах с f_2 (при разных значениях δ)

Задачи с f_3 отличаются тем, что берега полностью расходятся при условии, что δ не слишком мало (рисунок 4.8).

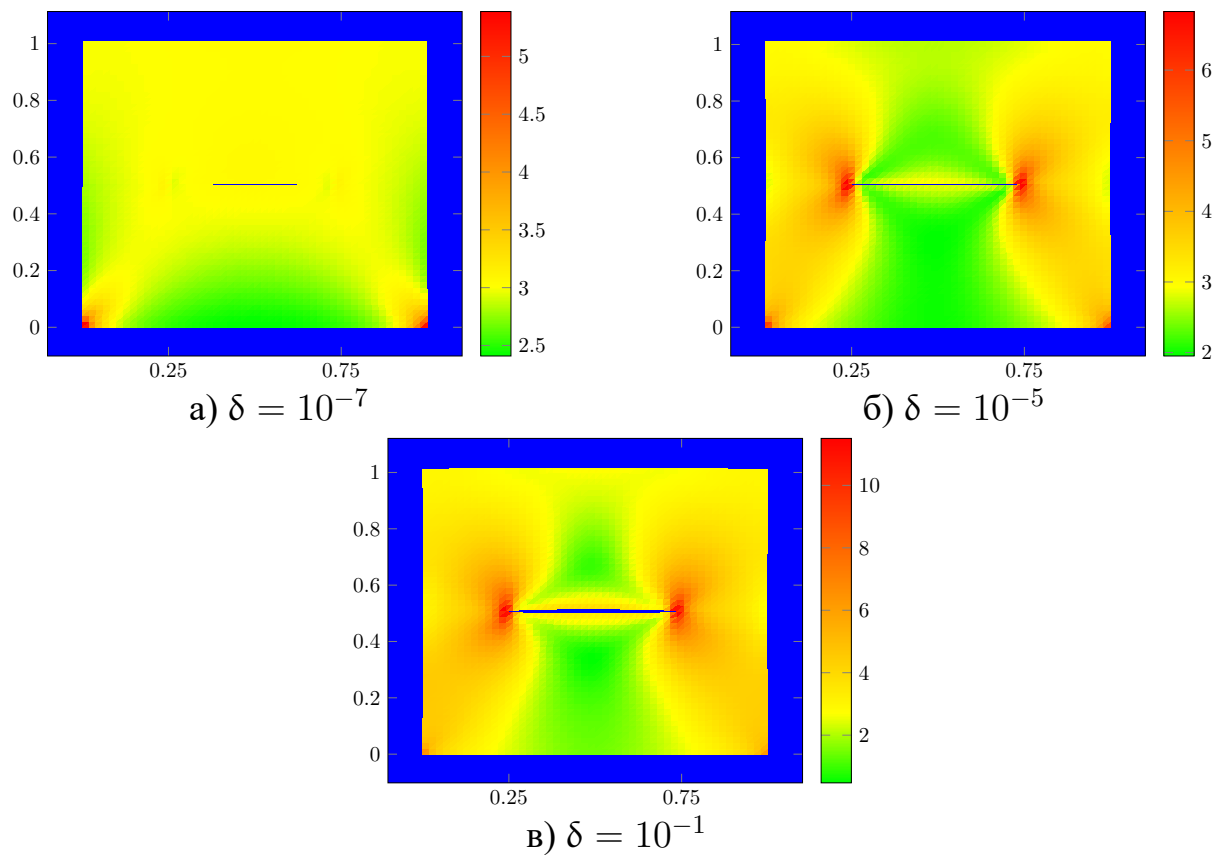


Рисунок 4.8 — Решения задачи для f_3

В таблице 7 проведена оценка скорости сходимости метода для задачи с f_2 при широком диапазоне значений параметра разрушения δ . Можно видеть, что при очень малых значениях δ для сходимости требуется большое количество итераций.

Отметим влияние параметра s на сходимость итерационного процесса. Если в обобщенном методе Ньютона дробление шага s выполнять с меньшим множителем, то можно добиться увеличения скорости сходимости. При этом будет выполняться больше итераций дробления шага (количество которых не отражено в таблице 7), но каждый шаг метода Ньютона станет эффективнее, поэтому количество итераций уменьшится, а значит, и число самых продолжительных операций — вычисление обратных матриц к матрице Гессе. В таблице 8 приведена оценка скорости сходимости для задачи с f_2 , когда s дробится по формуле $s = s/1.1$.

Несмотря на то, что сходимость метода Удзавы с модифицированными функционалами Лагранжа доказывается в предположении H^2 -регулярности ре-

Таблица 7 — Количество итераций для f_2 при разных δ (множитель уменьшения s равен 2)

δ	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
$k_{\text{МУ}}$	26	21	19	17	15	50	18	111	899
$m_{\text{МН}}$	32	27	26	22	21	53	20	112	900

Таблица 8 — Количество итераций для f_2 (множитель уменьшения s равен 1.1)

δ	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
$k_{\text{МУ}}$	8	12	8	11	10	11	19	121	888
$m_{\text{МН}}$	13	17	13	16	15	14	21	122	889

шения, которая для задач теории трещин не свойственна, численная реализация методов стабильно приводит к решению.

В теореме 23 при $\delta \rightarrow 0$ константа C' может начать преобладать, так что оценка точности решения может ухудшиться. Численные расчеты показывают, что при предельных значениях параметра δ увеличивается сложность вычислений. В таких случаях целесообразно переходить к соответствующей предельной модели.

Заключение

Диссертационная работа посвящена расширению сферы применения схем двойственности и построению оптимизационных алгоритмов, основанных на модифицированных функционалах Лагранжа, для решения контактных задач теории упругости с ограничениями в виде неравенств.

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Уточнены существующие доказательства некоторых положений теории модифицированной функции Лагранжа применительно к задачам с выпуклыми функциями. Обоснована справедливость применения теории модифицированных функционалов Лагранжа к задачам выпуклого программирования в случае не сильно выпуклой целевой функции.
2. Обосновано применение модифицированных функционалов Лагранжа для решения модельной задачи с трещиной, задачи контакта двух упругих тел (в том числе в полукоэрцитивном случае), задачи о теле с дефектом, с параметром поврежденности. Обоснована теоретическая сходимость методов.
3. Выполнена численная реализация схем двойственности при конечно-элементной аппроксимации задач. Для получаемых задач конечномерной минимизации применены и реализованы эффективные численные алгоритмы.
4. Разработаны программные приложения для численных расчетов при исследовании поставленных задач.
5. Проведен сравнительный анализ результатов вычислительных экспериментов. Для рассмотренных задач описана скорость сходимости в зависимости от параметра метода r , который может быть сколь угодно большим. Для задачи о теле с дефектом описана скорость сходимости в зависимости от значения параметра поврежденности δ .

Модифицированные функционалы Лагранжа — весьма эффективный инструмент для исследования и решения физических задач с нелинейными краевыми условиями. Они могут применяться как к коэрцитивным, так и к полукоэрцитивным неравенствам. Реализация схем двойственности с одновременной конечно-элементной аппроксимацией — эффективное средство решения прикладных задач механики. Необходимо продолжать развивать эту теорию и

внедрять механизмы счета в современные среды математических расчетов. Цель нашей работы — продолжить развитие теории модифицированных функционалов Лагранжа и схем двойственности применительно к прикладным задачам механики.

Автор выражает благодарность главному научному сотруднику Вычислительного центра ДВО РАН Р. В. Намму, организовавшему работу научных семинаров, в ходе которых была получена большая часть результатов, представленных в диссертации, научному руководителю Н. Н. Максимовой за активную поддержку, помощь и научное руководство, а также главному научному сотруднику лаборатории математического моделирования сложных физических и биологических систем АмГУ А. Г. Масловской.

Список литературы

1. *Fichera, G.* Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno / G. Fichera // Atti Accad. Naz. Lincei, Mem., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. — 1964. — 7:2. — P. 91—140.
2. *Stampacchia, G.* Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes / G. Stampacchia // C. R. Acad. Sci., Paris. — 1964. — No. 258. — P. 4413—4416.
3. *Дюво, Г.* Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. — М. : Наука, 1980. — 384 с.
4. *Экланд, И.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Теммам. — Новосибирск : Наука, 1979. — 400 с.
5. *Гловински, Р.* Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер. — М. : Мир, 1979. — 576 с.
6. *Киндерлерер, Д.* Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья. — М. : Мир, 1983. — 256 с.
7. Решение вариационных неравенств в механике / И. Главачек [и др.]. — М. : Мир, 1986. — 270 с.
8. *Михлин, С. Г.* Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1970. — 512 с.
9. *Бердичевский, В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Л. Бердичевский. — М. : Наука, 1983. — 448 с.
10. *Сьярле, Ф.* Математическая теория упругости / Ф. Сьярле. — М. : Мир, 1992. — 472 с.
11. *Кравчук, А. С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике / А. С. Кравчук. — М. : МГАПИ, 1997. — 333 с.
12. *Вихтенко, Э. М.* Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением / Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2007. — 47:12. — С. 2023—2036.

13. *Вихтенко, Э. М.* Характеристические свойства модифицированного функционала Лагранжа для контактной задачи теории упругости с заданным трением / Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм // Дальневост. матем. журн. — 2009. — 9:1—2. — С. 38—47.
14. *Вихтенко, Э. М.* О методе двойственности для решения модельной задачи с трещиной / Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм // Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — 22:1. — С. 36—43.
15. *Вихтенко, Э. М.* Методы решения полукоэрцитивных вариационных неравенств механики на основе модифицированных функционалов Лагранжа / Э. М. Вихтенко, Г. С. Ву, Р. В. Намм // Дальневост. матем. журн. — 2014. — 14:1. — С. 6—17.
16. *Кушнирук, Н. Н.* Метод Удзавы с модифицированной функцией Лагранжа для решения задачи о движении жидкости в бесконечной трубе с трением на границе / Н. Н. Кушнирук // Информатика и системы управления. — 2009. — 19:1. — С. 3—14.
17. *Кушнирук, Н. Н.* Характеристические свойства седловой точки модифицированного функционала Лагранжа в полукоэрцитивной модельной задаче с трением / Н. Н. Кушнирук // Вестник Амурского Государственного Университета. Серия: естественные и экономические науки. — 2009. — № 45. — С. 13—17.
18. *Кушнирук, Н. Н.* Метод множителей Лагранжа для решения полукоэрцитивной модельной задачи с трением / Н. Н. Кушнирук, Р. В. Намм // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2009. — 12:4. — С. 409—420.
19. *Намм, Р. В.* О сглаживающем методе двойственности для решения модельной задачи с заданным трением / Р. В. Намм, А. С. Ткаченко // Вестник Тихоокеанского Государственного Университета. — 2010. — № 3. — С. 13—22.
20. *Кушнирук, Н. Н.* Об устойчивом сглаживающем методе решения модельной задачи механики с трением / Н. Н. Кушнирук, Р. В. Намм, А. С. Ткаченко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2011. — 51:6. — С. 1032—1042.
21. *Намм, Р. В.* Модифицированная схема двойственности для решения упругой задачи с трещиной / Р. В. Намм, Г. И. Цой // Сиб. журн. вычисл. матем. — 2017. — 20:1. — С. 47—58.

22. *Намм, Р. В.* Решение контактной задачи теории упругости с жестким включением / Р. В. Намм, Г. И. Цой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2019. — 59:4. — С. 699—706.
23. *Хлуднев, А. М.* Об иерархии тонких включений в упругих телах / А. М. Хлуднев, Т. С. Попова // Математические заметки СВФУ. — 2016. — 23:1. — С. 87—107.
24. *Khudnev, A. M.* О равновесии пластины с тонким жестким включением и свободным краем / А. М. Khudnev // Математические заметки СВФУ. — 2021. — 28:3. — С. 105—120.
25. *Хлуднев, А. М.* Задача сопряжения упругого включения Тимошенко и полужесткого включения / А. М. Хлуднев, Т. С. Попова // Математические заметки СВФУ. — 2018. — 25:1. — С. 73—89.
26. *Хлуднев, А. М.* О задаче сопряжения двух слабо искривленных включений в упругом теле / А. М. Хлуднев, Т. С. Попова // Сибирский математический журнал. — 2020. — 61:4. — С. 932—945.
27. *Popova, T. S.* Numerical solution of the equilibrium problem for a two-dimensional elastic body with a thin semirigid inclusion / T. S. Popova // Математические заметки СВФУ. — 2021. — 28:1. — Р. 51—66.
28. *Рудой, Е. М.* Метод декомпозиции области для модельной задачи теории трещин с возможным контактом берегов / Е. М. Рудой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2015. — 55:2. — С. 310—321.
29. *Рудой, Е. М.* Численное решение задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся тонким жестким включением / Е. М. Рудой // Сиб. журн. индустр. матем. — 2016. — 19:2. — С. 74—87.
30. *Лазарев, Н. П.* Задача оптимального управления длиной поперечной трещины в модели о равновесии двумерного тела с двумя пересекающимися трещинами / Н. П. Лазарев, Е. М. Рудой, Т. С. Попова // Математические заметки СВФУ. — 2018. — 25:3. — С. 43—53.
31. *Furtsev, A.* Modeling of bonded elastic structures by a variational method: theoretical analysis and numerical simulation / A. Furtsev, E. Rudoy, H. Itou // Internat. jour. of solids and structures. — 2020. — Volumes 182—183. — Р. 100—111.

32. *Lazarev, N.* Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies / N. Lazarev, E. Rudoy // *J. Comput. Appl. Math.* — 2022.
33. *Вторушин, Е. В.* Численное исследование модельной задачи для уравнения Пуассона с ограничениями типа неравенств в области с разрезом / Е. В. Вторушин // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2005. — 8:1. — С. 41—49.
34. *Вторушин, Е. В.* Численное исследование модельной задачи деформирования упругопластического тела с трещиной при условии возможного контакта берегов / Е. В. Вторушин // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2006. — 9:4. — С. 301—310.
35. *Kovtunen, V. A.* Numerical simulation of the non-linear crack problem with nonpenetration / V. A. Kovtunen // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2010. — 27:2. — P. 163—179.
36. *Hintermüller, M.* The primal-dual active set method for a crack problem with non-penetration / M. Hintermüller, V. Kovtunen, K. Kunisch // *IMA J. Appl. Math.* — 2004. — 69:1. — P. 1—26.
37. *Клабукова, Л. С.* Вариационная постановка задач о деформации сетчатой композиционной пластинки с сетками различного типа / Л. С. Клабукова // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2007. — 47:2. — С. 321—337.
38. *Хлуднев, А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях / А. М. Хлуднев. — М. : Физматлит, 2010. — 252 с.
39. *Морозов, Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин / Н. Ф. Морозов. — М. : Наука, 1984. — 256 с.
40. *Hestenes, M. R.* Multiplier and gradient methods / M. R. Hestenes // *J. Optimizat. Theory and Appl.* — 1969. — 4:5. — P. 303—320.
41. *Powell, M. J. D.* A method for nonlinear constraints in minimization problems / M. J. D. Powell // *Optimization. London-New York: Acad. Press.* — 1969. — P. 283—298.
42. *Rockafellar, R. T.* The multiplier method of Hestenes and Powell applied to convex programming / R. T. Rockafellar // *J. Optimizat. Theory and Appl.* — 1973. — 12:6. — P. 555—562.

43. *Гольштейн, Е. Г.* Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации / Е. Г. Гольштейн, Н. В. Третьяков. — М. : Наука, 1989. — 400 с.
44. *Гроссман, К.* Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации / К. Гроссман, А. А. Каплан. — Новосибирск : Наука, 1981. — 184 с.
45. *Бертсекас, Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа / Д. Бертсекас. — М. : Радио и связь, 1987. — 400 с.
46. *Bertsekas, D. P.* Convex Optimization Theory / D. P. Bertsekas. — Belmont, Massachusetts : Athena Scientific, 2009. — 256 p.
47. *Поляк, Б. Т.* Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. — М. : Наука, 1983. — 384 с.
48. *Коннов, И. В.* Метод множителей Лагранжа для вариационных неравенств / И. В. Коннов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2001. — 41:9. — С. 1344—1357.
49. Метод итеративной проксимальной регуляризации для поиска седловой точки в полукоэрцитивной задаче Синьорини / Г. С. Ву [и др.] // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2006. — 46:11. — С. 2024—2031.
50. *Ву, Г. С.* Итерационный метод поиска седловой точки для полукоэрцитивной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа / Г. С. Ву, Р. В. Намм, С. А. Сачков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2006. — 46:1. — С. 26—36.
51. *Вихтенко, Э. М.* О сходимости метода Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа в вариационных неравенствах механики / Э. М. Вихтенко, Г. С. Ву, Р. В. Намм // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2010. — 50:8. — С. 1357—1366.
52. *Вихтенко, Э. М.* Функционалы чувствительности в контактных задачах теории упругости / Э. М. Вихтенко, Г. Ву, Р. В. Намм // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2014. — 54:7. — С. 1218—1228.
53. *Вихтенко, Э. М.* Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа для решения квазивариационного неравенства Синьорини / Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2008. — 48:9. — С. 1571—1579.

54. *Namm, R. V.* Solution of the static contact problem with Coulomb friction between an elastic body and a rigid foundation / R. V. Namm, G. I. Tsoy // Journ. of comput. and appl. mathem. — 2022. — Volume 419. — P. 114725.
55. *Оден, Д.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Д. Оден. — М. : Мир, 1976. — 464 с.
56. *Стренг, Г.* Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Д. Фикс. — М. : Мир, 1977. — 351 с.
57. *Галлагер, Р.* Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. — М. : Мир, 1984. — 428 с.
58. *Васильев, Ф. П.* Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. — М. : Факториал Пресс, 2002. — 824 с.
59. *Киреев, В. И.* Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. — М. : Высшая школа, 2008. — 480 с.
60. *Колмогоров, А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 543 с.
61. *Вулих, Б. З.* Введение в функциональный анализ / Б. З. Вулих. — М. : Наука, 1967. — 416 с.
62. *Рокафеллар, Р. Т.* Выпуклый анализ / Р. Т. Рокафеллар. — М. : Мир, 1973. — 472 с.
63. *Байокки, К.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей / К. Байокки, А. Капело. — М. : Наука, 1988. — 448 с.
64. *Владимиров, В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1988. — 512 с.
65. *Лионс, Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 587 с.
66. *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — СПб. : БХВ, 2004. — 816 с.
67. *Сea, Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы / Ж. Сea. — М. : Мир, 1973. — 244 с.

68. *Антипин, А. С.* Функция чувствительности, ее свойства и приложения / А. С. Антипин, А. И. Голиков, Е. В. Хорошилова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2011. — 51:12. — С. 2126—2142.
69. *Куфнер, А.* Нелинейные дифференциальные уравнения / А. Куфнер, С. Фучик. — М. : Наука, 1988. — 304 с.
70. *Нестеров, Ю. Е.* Введение в выпуклую оптимизацию / Ю. Е. Нестеров. — М. : МЦНМО, 2010. — 280 с.
71. *Фикера, Г.* Теоремы существования в теории упругости / Г. Фикера. — М. : Мир, 1974. — 159 с.
72. *Khludnev, A. M.* Analysis of Cracks in Solids / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenکو. — WIT Press, Southampton, Boston, 2000. — 386 p.
73. *Родин, А. С.* Решение задачи контакта двух упругих тел методом Шварца при использовании сеток с существенно отличающимися шагами / А. С. Родин // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2017. — № 120. — С. 1—28.
74. Моделирование контактного взаимодействия системы термоупругих тел методом Шварца для многомерного случая / М. П. Галанин [и др.] // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. — 2016. — 681:12. — С. 9—20.
75. Применение метода Шварца для моделирования контактного взаимодействия системы тел / М. П. Галанин [и др.] // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — 55:8. — С. 1429—1443.
76. *Haslinger, J.* A domain decomposition method for two-body contact problems with Tresca friction / J. Haslinger, R. Kučera, J. Ritou // Adv Comput Math. — 2014. — No. 40. — P. 65—90.
77. *Koko, J.* Uzawa block relaxation domain decomposition method for a two-body frictionless contact problem / J. Koko // Applied Mathematics Letters. — 2009. — No. 22. — P. 1534—1538.
78. *Toselli, A.* Domain Decomposition methods – Algorithms and Theory / A. Toselli, O. Widlund. — Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005. — 450 p.

79. *Игнатьева, М. А.* Применение метода декомпозиции области и несогласованных сеток при решении некоторых вариационных неравенств / М. А. Игнатьева, А. В. Лапин // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. — 2015. — 157:2. — С. 68—73.
80. *Steinbach, O.* Stability Estimates for Hybrid Coupled Domain Decomposition Methods / O. Steinbach. — Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. — 450 p.
81. *Бабин, А. П.* Конечноэлементное моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики контактной псевдосреды / А. П. Бабин, М. В. Зернин // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. — 2009. — № 4. — С. 84—107.
82. *Бураго, Н. Г.* Обзор контактных алгоритмов / Н. Г. Бураго, В. Н. Кукуджанов // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. — 2005. — № 1. — С. 45—87.
83. *Александров, А. В.* Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. — М. : Высшая школа, 1990. — 400 с.
84. *Jarušek, J.* Contact problems with bounded friction. Coercive case / J. Jarušek // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1983. — 33:2. — P. 237—261.
85. *Jarušek, J.* Contact problems with bounded friction. Semicoercive case / J. Jarušek // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1984. — 34:4. — P. 619—629.
86. *Mangasarian, O. L.* A finite Newton method for classification / O. L. Mangasarian // Optim. Methods Softw. — 2002. — 17:5. — P. 913—929.
87. *Mangasarian, O. L.* A Newton method for linear programming / O. L. Mangasarian // J. Optim. Theory and Appl. — 2004. — No. 121. — P. 1—18.
88. *Голиков, А. И.* Обобщенный метод Ньютона для задач линейной оптимизации с ограничениями-неравенствами / А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко // Тр. ИММ УрО РАН. — 2013. — 19:2. — С. 98—108.
89. *Баландин, Н. Ю.* Методы решения СЛАУ большой размерности / Н. Ю. Баландин, Э. П. Шурина. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2000. — 70 с.
90. *Kaporin, I. E.* High quality preconditioning of a general symmetric positive definite matrix based on its $U^T U + U^T R + R^T U$ -decomposition / I. E. Kaporin // Numer. Linear Algebra Appl. — 1998. — 5:6. — P. 483—509.

91. *Khudnev, A. M.* On modeling elastic bodies with defects / A. M. Khudnev // Sib. E'lektron. Mat. Izv. — 2018. — No. 15. — P. 153—166.
92. *Rudoy, E. M.* Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition / E. M. Rudoy // ESAIM: M2AN. — 2016. — No. 50. — P. 995—1009.
93. *Марчук, Г. И.* Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М. : Наука, 1981. — 416 с.

Публикации автора по теме диссертации

94. *Жильцов, А. В.* Метод множителей Лагранжа в задаче конечномерного выпуклого программирования / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // XXXVIII Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е. В. Золотова. — 2014. — С. 135—140.
95. *Жильцов, А. В.* Модифицированные функционалы Лагранжа для решения модельной задачи с трещиной / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // Математическое программирование и приложения. — 2015. — С. 27—28.
96. *Жильцов, А. В.* Использование параллельного программирования при численном решении модельной задачи с трещиной методом градиентного спуска / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // В сборнике: Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления материалы III всероссийской науч.-практ. конф. Ответственные за выпуск: А. И. Мазур, А. Л. Верхотуров. — 2015. — С. 52—56.
97. *Жильцов, А. В.* Метод множителей Лагранжа для решения модельной задачи с трещиной / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // Топологическая теория чисел и их приложения. Материалы Международной конференции. Под научной ред. В. М. Бухштабера, В. А. Быковского. — 2015. — С. 80—81.
98. *Жильцов, А. В.* Модифицированные функционалы Лагранжа для решения задачи контакта двух тел с учетом трения / А. В. Жильцов // Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций. — 2017. — С. 27—30.
99. *Жильцов, А. В.* Обобщенный метод Ньютона для решения контактной задачи теории упругости / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении. — 2018. — С. 101—104.
100. *Жильцов, А. В.* Метод множителей Лагранжа в задаче конечномерного выпуклого программирования / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // Дальневосточный математический журнал. — 2015. — Т. 15, № 1. — С. 53—60.

101. *Жильцов, А. В.* Метод множителей Лагранжа для решения модельной задачи с трещиной / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // Математические заметки СВФУ. — 2015. — Т. 22, № 1. — С. 93—103.
102. *Жильцов, А. В.* Метод множителей Лагранжа для решения задачи об одностороннем контакте упругих тел с ограниченной зоной контакта / А. В. Жильцов // Математические заметки СВФУ. — 2016. — Т. 23, № 4. — С. 99—114.
103. *Жильцов, А. В.* Устойчивый алгоритм решения полукоэрцитивной задачи контакта двух тел с трением на границе / А. В. Жильцов, Р. В. Намм // Дальневосточный математический журнал. — 2019. — Т. 19, № 2. — С. 173—184.
104. *Жильцов, А. В.* Седловая точка функционалов Лагранжа в задаче о теле, содержащем тонкий дефект с параметром / А. В. Жильцов // Информатика и системы управления. — 2022. — Т. 73, № 3. — С. 84—92.
105. *Жильцов, А. В.* Двойственный метод для решения задачи о равновесии тела, содержащего тонкий дефект / А. В. Жильцов, Н. Н. Максимова // Сиб. ЖВМ. — 2023. — Т. 26, № 2. — С. 183—198. — (переводная версия в журнале «Numerical Analysis and Applications», реф. SCOPUS).
106. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Метод множителей Лагранжа для решения задачи об одностороннем контакте двух упругих тел с ограниченной зоной контакта / А. В. Жильцов. — № 2016660152 ; заявл. 08.09.2016 ; опубл. 12.07.2016, 2016660152 (Рос. Федерация).
107. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Метод множителей Лагранжа для решения модельной задачи о двумерном теле с трещиной / А. В. Жильцов ; ДВГУПС. — № 2016660834 ; заявл. 29.07.2016 ; опубл. 22.09.2016, 2016660834 (Рос. Федерация).
108. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Расчет напряженно-деформированных состояний тел с ограниченной зоной контакта модифицированным методом двойственности с регуляризацией / А. В. Жильцов, Э. М. Вихтенко ; ТОГУ. — № 2017611879 ; заявл. 10.02.2017 ; опубл. 14.11.2016, 2017611879 (Рос. Федерация).

109. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Расчет напряженно-деформированных состояний двух тел с трением на границе контакта при помощи метода последовательных приближений с регуляризацией модифицированного функционала Лагранжа / А. В. Жильцов ; ДВГУПС. — № 2019616732 ; заявл. 21.05.2020 ; опубл. 29.05.2019, 2019616732 (Рос. Федерация).
110. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Программа для решения задачи о теле с дефектом с использованием обобщенного метода Ньютона с правилом Армихо / А. В. Жильцов. — № 2023611960 ; заявл. 17.01.2023 ; опубл. 26.01.2023, 2023611960 (Рос. Федерация).

Приложение А

Листинги программных кодов

А.1 Задача Синьорини

В листинге А.1 приведен код программы, реализующей алгоритм Удзавы для задачи Синьорини, численное решение которой описано в разделе 1.3.2. Программа реализована на языке программирования С# .

Листинг А.1: Алгоритм Удзавы для задачи Синьорини

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;
5 using System.Diagnostics;
using System.IO;

namespace ConsoleSignoriniProblem
{
10 class Program
    {
        struct FindSolutionOutput
        {
15         public int N;
            public int iter1;
            public int iter2;
            public long time;
            public double[,] y;
            public double[] p;
20         public double h;
        }

        static void Main(string[] args)
        {
25         Process thisProc = Process.GetCurrentProcess();
            thisProc.PriorityClass = ProcessPriorityClass.RealTime;
```

```

        FindSolutionOutput output = SuccessiveProjectionMethod(64,
0.001);
    }

    static private FindSolutionOutput SuccessiveDisplacement(int
hInv, double r, double eps)
    {
        Stopwatch stopWatch = new Stopwatch();

        double[,] y;           // текущее решение
        double yOld;

        double[] p;           // двойственная переменная
        double pOld;

        double delta, psi;

        double[,] A = makeATable(); // массив с коэффициентами
        double[] F = makeF(hInv);   // столбец правых частей

        double h = 1 / (double)hInv;
        int N = hInv + 1;

        y = new double[N, N];
        p = new double[N * N];

        int iter1 = 0;
        int iter2 = 0;
        double ay1, ay2, ay3, ay4, ay5, ay6;
        int nT;

        stopWatch.Reset();
        stopWatch.Start();

        do
        {
            do
            {
                delta = 0;
                for (int j = 0; j < N; j++)
                {
                    for (int i = 0; i < N; i++)
                    {

```

```

70     yOld = y[i, j];

     if ((0<i & i<hInv) & (0<j & j<hInv)) nT=0;
     else if (j == 0 & i == 0) nT=6;
     else if (j == 0 & (0<i & i<hInv)) nT=7;
     else if (j == 0 & i == hInv) nT=8;
75     else if ((0<j & j<hInv) & i == 0) nT=4;
     else if ((0<j & j<hInv) & i == hInv) nT=5;
     else if (j == hInv & i == 0) nT=1;
     else if (j == hInv & (0<i & i<hInv)) nT=2;
     else if (j == hInv & i == hInv) nT=3;
80     else nT=-1;

     ay1=0; ay2=0; ay3=0; ay4=0; ay5=0; ay6=0;
     if (i<hInv) ay1=A[nT, 1] * y[i+1, j];
     if (i<hInv & j<hInv) ay2=A[nT, 2] * y[i+1, j+1];
85     if (j<hInv) ay3=A[nT, 3] * y[i, j+1];
     if (i>0) ay4=A[nT, 4] * y[i-1, j];
     if (i>0 & j>0) ay5=A[nT, 5] * y[i-1, j-1];
     if (j>0) ay6=A[nT, 6] * y[i, j-1];

90     if (0 < i & i < N - 1 & 0 < j & j < N - 1)
        {
            y[i, j] = (F[j*N+i] - (ay1 + ay2 + ay3 + ay4 +
ay5 + ay6)) / A[nT, 0];
        }
     else
95     {
        psi = (F[j*N+i] - (ay1 + ay2 + ay3 + ay4 + ay5 +
ay6)) / A[nT, 0];
        if (psi >= p[j*N+i] / r)
            {
                y[i, j] = psi;
            }
        else
            {
                y[i, j] = (F[j*N+i] + p[j*N+i] - (ay1 + ay2 +
ay3 + ay4 + ay5 + ay6)) / (A[nT, 0] + r);
            }
100     }
        delta = Math.Max(delta, Math.Abs(y[i, j] - yOld));
    }
}

```

```

        iter1++;
110     }
        while (delta >= eps * h);

        delta = 0;
        for (int j = 0; j < N; j++)
115     {
            for (int i = 0; i < N; i++)
            {
                if ((0<i & i<N-1 & 0<j & j<N-1) == false)
                {
120                 pOld = p[j*N+i];
                    p[j*N+i] = Math.Max(0, p[j*N+i] - r * y[i, j]);
                    delta = Math.Max(delta, Math.Abs(p[j*N+i] - pOld))
;
                }
            }
125     }
        iter2++;
    }
    while (delta >= 100*eps*h);

130    stopWatch.Stop();

    FindSolutionOutput result;

    result.time = stopWatch.ElapsedMilliseconds / 1000;
135    result.y = y;
    result.p = p;
    result.iter1 = iter1;
    result.iter2 = iter2;
    result.h = h;
140    result.N = N;

    return result;
}

145 private static double[,] makeATable()
    {
        double[, ,] tI = new double[2, 6, 7]{
            {
150                 {+0.5, -0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
                    {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
            }
        }
    }
}

```

```

        {+0.5, +0.0, +0.0, +0.0, -0.5, +0.0, +0.0},
        {+0.5, +0.0, +0.0, +0.0, -0.5, +0.0, +0.0},
        {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
        {+0.5, -0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0}
155     },
        {
        {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
        {+0.5, +0.0, +0.0, -0.5, +0.0, +0.0, +0.0},
        {+0.5, +0.0, +0.0, -0.5, +0.0, +0.0, +0.0},
160     {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
        {+0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, -0.5},
        {+0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, -0.5}
    }
};

165     double[,] tA = new double[9, 7];
    for (int i = 0; i <= 6; i++)
    {
        for (int j = 0; j <= 1; j++)
        {
170         tA[0,i] = tA[0,i] + tI[j,0,i] + tI[j,1,i] + tI[j,2,i]
+ tI[j,3,i] + tI[j,4,i] + tI[j,5,i];
        tA[1,i] = tA[1,i] + tI[j,5,i];
        tA[2,i] = tA[2,i] + tI[j,3,i] + tI[j,4,i] + tI[j,5,i];
        tA[3,i] = tA[3,i] + tI[j,3,i] + tI[j,4,i];
        tA[4,i] = tA[4,i] + tI[j,0,i] + tI[j,1,i] + tI[j,5,i];
175     tA[5,i] = tA[5,i] + tI[j,2,i] + tI[j,3,i] + tI[j,4,i];
        tA[6,i] = tA[6,i] + tI[j,0,i] + tI[j,1,i];
        tA[7,i] = tA[7,i] + tI[j,0,i] + tI[j,1,i] + tI[j,2,i];
        tA[8,i] = tA[8,i] + tI[j,2,i];
        }
180     }

    return tA;
}

185     private static double[] makeF(int hInv)
    {
        double h = 1 / (double)hInv;
        int N = hInv + 1;

190     double[] arr = new double[N * N];

    double x, y;

```

```

195     for (int j = 0; j < N; j++)
        {
            for (int i = 0; i < N; i++)
                {
                    x = i*h;
                    y = j*h;

200             if ((x>=0.5) & (y<=0.5)) arr[j*N+i] = -6.004*h*h;
                else arr[j*N+i] = 2.000*h*h;

                if ((0<i & i<N-1 & 0<j & j<N-1) == false)
                    {
205                 if (i==0 & j==0) arr[j*N+i] = arr[j*N+i]/3;
                    else if (i==0 & j==N-1) arr[j*N+i] = arr[j*N+i]/6;
                    else if (i==N-1 & j==0) arr[j*N+i] = arr[j*N+i]/6;
                    else if (i==N-1 & j==N-1) arr[j*N+i] = arr[j*N+i]/3;
                    else arr[j*N+i] = arr[j*N+i]/2;
210                 }
                }
            }
        }
215     return arr;
    }
}

```

A.2 Модельная задача с трещиной

В листинге A.2 приведен код программы, реализующей алгоритм Удзавы для модельной задачи с трещиной, численное решение которой описано в разделе 2.3. Программа реализована на языке программирования C# .

Листинг A.2: Агоритм Удзавы для модельной задачи с трещиной

```

5 using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Diagnostics;
using System.IO;

```

```

namespace ConsoleCrackProblem
{
10   class Program
    {
        static double Gamma0x1 = 0.2, Gamma0x2 = 0.8, Gamma0y = 0.4;
        // координаты трещины

        struct FindSolutionOutput
15     {
            public int N;
            public int iter1;
            public int iter2;
            public long time;
20     public double[,] u;
            public double[] l;
            public double h;
        }

        static void Main(string[] args)
25     {
            Process thisProc = Process.GetCurrentProcess();
            thisProc.PriorityClass = ProcessPriorityClass.RealTime;

            FindSolutionOutput output = SuccessiveDisplacement(32,
30     10000, 0.0001);
        }

        static private FindSolutionOutput SuccessiveDisplacement(int
        hInv, double r, double eps)
35     {
            Stopwatch stopWatch = new Stopwatch();

            double[,] u;           // текущее решение
            double uOld;
            double[] l;           // двойственная переменная
40     double lOld;
            double[] t;           // скачок функции
            double tOld;
            double delta, psi;

45     double[,] A = makeATable(); // массив с коэффициентами
            double[] F = makeF(hInv); // столбец правых частей

```



```

double h = 1 / (double)hInv;
int N = hInv + 1;

int ct1 = (int)Math.Floor(Gamma0x1 / h);
int ct2 = (int)Math.Ceiling(Gamma0x2 / h);
int cty = (int)Math.Round(Gamma0y / h);

u = new double[N, N];
l = new double[N * N];
t = new double[ct2 - ct1 + 1];

int iter1 = 0, iter2 = 0;
double au0, au1, au3, au4, au6;

stopWatch.Reset();
stopWatch.Start();

do
{
    do
    {
        delta = 0;
        for (int j = 0; j < N; j++)
        {
            for (int i = 0; i < N; i++)
            {
                uOld = u[i, j];
                tOld = 0;
                au0=0; au1=0; au3=0; au4=0; au6=0;

                if ((j==cty+1) && (i>ct1) && (i<ct2))
                { // для узлов рядом с верхним берегом трещины
                    au1 = A[0,1] * u[i+1, j];
                    au3 = A[0,3] * u[i, j+1];
                    au4 = A[0,4] * u[i-1, j];
                    au6 = A[0,6] * (u[i, j-1] + t[i-ct1]);

                    u[i,j] = (F[j*N+i] -(au1+au3+au4+au6)) / A[0,0];
                }
                else if ((j==cty) && (i>ct1) && (i<ct2))
                { // для внутренних узлов верхнего берега трещины
                    au0 = A[1,0] * u[i, j];

```

```

90     au1 = A[1,1] * (u[i+1, j] + t[i-ct1+1]);
     au3 = A[1,3] * u[i, j+1];
     au4 = A[1,4] * (u[i-1, j] + t[i-ct1-1]);

     tOld = t[i-ct1];
95     psi = (F[j*N+i] / 2 - (au0+au1+au3+au4+au6)) / A
[1,0];
     if (l[j*N+i] - r * psi < 0)
     t[i-ct1] = psi;
     else t[i-ct1] = (F[j*N+i] / 2 - (au0+au1+au3+au4+
au6) + h * l[j*N+i]) / (A[1,0] + r * h);

100     // для внутренних узлов нижнего берега трещины
     au0 = A[1,0] * t[i-ct1];
     au1 = A[2,1] * u[i+1, j] + A[1,1] * (u[i+1, j] +
t[i-ct1+1]);
     au3 = A[1,3] * u[i, j+1];
     au4 = A[2,4] * u[i-1, j] + A[1,4] * (u[i-1, j] +
t[i-ct1-1]);
105     au6 = A[2,6] * u[i, j-1];

     u[i,j] = (F[j*N+i] - (au0+au1+au3+au4+au6)) / (A
[2,0] + A[1,0]);
     }
     else if ((j==cty) && (i==ct1))
110     { // для крайнего левого узла трещины
     au1 = A[3,1] * (u[i+1, j] + t[i - ct1 + 1] + u[i
+ 1, j]) / 2;
     au3 = A[3,3] * u[i, j+1];
     au4 = A[3,4] * u[i-1, j];
     au6 = A[3,6] * u[i, j-1];
115     u[i,j] = (F[j*N+i] - (au1+au3+au4+au6)) / A[3,0];
     }
     else if ((j==cty) && (i==ct2))
     { // для крайнего правого узла трещины
120     au1 = A[4,1] * u[i+1, j];
     au3 = A[4,3] * u[i, j+1];
     au4 = A[4,4] * (u[i-1, j] + t[i-ct1-1] + u[i-1,
j]) / 2;
     au6 = A[4,6] * u[i, j-1];
125     u[i,j] = (F[j*N+i] - (au1+au3+au4+au6)) / A[4,0];

```

```

    }
    else if ((0<i) & (i<N-1) & (0<j) & (j<N-1))
    {
        au1 = A[0,1] * u[i+1, j];
        au3 = A[0,3] * u[i, j+1];
        au4 = A[0,4] * u[i-1, j];
        au6 = A[0,6] * u[i, j-1];

        u[i,j] = (F[j*N+i] -(au1+au3+au4+au6)) / A[0,0];
    }
    if (j==cty & i>ct1 & i<ct2) delta = Math.Max(delta
, Math.Abs(u[i, j] + t[i-ct1] - uOld - tOld));
    delta = Math.Max(delta, Math.Abs(u[i, j] - uOld));
    }
    }
    iter1++;
}
while (delta >= 0.01 * eps * h);

delta = 0;
for (int j = 1; j < N - 1; j++)
{
    for (int i = 1; i < N - 1; i++)
    {
        if ((j == cty) && (i >= ct1) && (i <= ct2))
        {
            lOld = l[j * N + i];
            l[j * N + i] = Math.Max(0, lOld - r * t[i - ct1]);
            delta = Math.Max(delta, Math.Abs(l[j * N + i] -
lOld));
        }
    }
    iter2++;
}
while (delta >= eps * h);

stopWatch.Stop();

FindSolutionOutput result;
result.time = stopWatch.ElapsedMilliseconds;
result.u = u;
result.l = l;

```

```

    result.iter1 = iter1;
    result.iter2 = iter2;
    result.h = h;
170    result.N = N;

    return result;
}

175 private static double[,] makeATable()
{ // tI[a, b, c]
  // a - номер переменной, по которой бралась производная
  // b - номер треуг., в котором искался интеграл производ.
  // c - номер соседа, участвовавшего в произведении
180 double[, ,] tI = new double[2, 6, 7]{
    {
      {+0.5, -0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
      {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
      {+0.5, +0.0, +0.0, +0.0, -0.5, +0.0, +0.0},
185      {+0.5, +0.0, +0.0, +0.0, -0.5, +0.0, +0.0},
      {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
      {+0.5, -0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0}
    },
    {
190      {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
      {+0.5, +0.0, +0.0, -0.5, +0.0, +0.0, +0.0},
      {+0.5, +0.0, +0.0, -0.5, +0.0, +0.0, +0.0},
      {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
      {+0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, -0.5},
195      {+0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, -0.5}
    }
  };

  double[,] tA = new double[9, 7];
  for (int i = 0; i <= 6; i++)
200  {
    for (int j = 0; j <= 1; j++)
      { // первое число - тип узла, суммируются коэффициенты
из тех соседей, которые у него есть
          tA[0,i] = tA[0,i] + tI[j,0,i] + tI[j,1,i] + tI[j,2,i]
+ tI[j,3,i] + tI[j,4,i] + tI[j,5,i];
          tA[1,i] = tA[1,i] + tI[j,0,i] + tI[j,1,i] + tI[j,2,i];
205          tA[2,i] = tA[2,i] + tI[j,3,i] + tI[j,4,i] + tI[j,5,i];
          tA[3,i] = tA[3,i] + tI[j,0,i] + tI[j,1,i] + tI[j,2,i]
+ tI[j,3,i] + tI[j,4,i] + tI[j,5,i];

```

```

        tA[4,i] = tA[4,i] + tI[j,0,i] + tI[j,1,i] + tI[j,2,i]
+ tI[j,3,i] + tI[j,4,i] + tI[j,5,i];
    }
}
210     return tA;
}

private static double[] makeF(int hInv)
{
215     double h = 1 / (double)hInv;
        int N = hInv + 1;

        int ct1 = (int)Math.Floor(Gamma0x1 / h);
        int ct2 = (int)Math.Ceiling(Gamma0x2 / h);
220     int cty = (int)Math.Round(Gamma0y / h);

        double[] F = new double[N * N];

        double a = 0.2;
225     double b = 0.2;
        double c = -0.2;
        double d = -0.2;
        double hh = h*h;
        /* Распределение давлений
230     * +-----+
        * |  c  |  d  |
        * |    ----    |
        * |  a  |  b  |
        * +-----+*/

235     int ctc = ct1 + (ct2 - ct1) / 2;
        int t;
        for (int j = 0; j < N; j++)
        {
240             for (int i = 0; i < N; i++)
                {
                    t = j*N+i;

245                     if      (j<cty  &&  i<ctc) F[t] = a*hh;
                    else if  (j<cty  &&  i>ctc) F[t] = b*hh;
                    else if  (j<cty  &&  i==ctc) F[t] = (a+b)*hh/2;
                    else if  (j>cty  &&  i<ctc) F[t] = c*hh;
                    else if  (j>cty  &&  i>ctc) F[t] = d*hh;

```

```

250         else if (j>cty && i==ctc) F[t] = (c+d)*hh/2;
        else if (j==cty && i<=ct1) F[t] = hh*(a+c)/2;
        else if (j==cty && i>=ct2) F[t] = hh*(b+d)/2;
        else if (j==cty && i>ct1 && i<ctc) F[t] = hh*(a+c)/4;
        else if (j==cty && i<ct2 && i>ctc) F[t] = hh*(b+d)/4;
        else F[t] = hh*(a+b+c+d)/8;
255     }
    }
    return F;
}
}
260 }

```

A.3 Задача контакта двух тел с учетом трения

В листинге A.3 приведен код программы, реализующей алгоритм Удзавы для задачи контакта двух тел, численное решение которой описано в разделе 3.5. Программа реализована на языке программирования C# .

Листинг A.3: Алгоритм Удзавы для задачи контакта двух тел с учетом трения

```

using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;
5 using System.Diagnostics;

namespace ConsoleContactProblemWithFriction
{
    class Worker
10    {
        /// <summary>
        /// Поиск решения задачи контакта двух тел с учетом трения.
        /// Метод последовательных приближений, модифицированные
        функционалы Лагранжа, поточечная релаксация
        /// </summary>
15        /// <param name="bSizeРазмеры"> каждого из тел</param>
        /// <param name="hШаг"> триангуляции</param>
        /// <param name="epsТочность"> вычислений</param>

```

```

    /// <param name="rПараметр"> МФЛ</param>
    /// <param name="EMодуль"> Юнга</param>
20    /// <param name="nuКоэффициент"> Пуассона</param>
    /// <param name="fКоэффициент"> трения</param>
    /// <param name="FPМатрица"> сил, действующих на каждое из
тел</param>
    public static FindSolution.FindSolutionOutput FindSolution(
int[][] bSize, double h, double eps, double r, double E, double
nu, double f, double[][, ,] FP)
    {
25        return FindSolution(bSize, h, eps, r, E, nu, f, FP, null);
    }

    /// <summary>
    /// Поиск решения задачи контакта двух тел с учетом трения.
30    /// Метод последовательных приближений, модифицированные
функционалы Лагранжа, поточечная релаксация
    /// </summary>
    /// <param name="bSizeРазмеры"> каждого из тел</param>
    /// <param name="hШаг"> триангуляции</param>
    /// <param name="epsilonТочность"> вычислений</param>
35    /// <param name="rПараметр"> МФЛ</param>
    /// <param name="EMодуль"> Юнга</param>
    /// <param name="nuКоэффициент"> Пуассона</param>
    /// <param name="fКоэффициент"> трения</param>
    /// <param name="FPМатрица"> сил, действующих на каждое из
тел</param>
40    /// <param name="backgroundWorkerЭкземпляр">
BackgroundWorker, используемый для синхронизации</param>
    public static FindSolution.FindSolutionOutput FindSolution(
int[][] bSize, double h, double epsilon, double r, double E,
double nu, double f, double[][, ,] FP, System.ComponentModel.Backgr
backgroundWorker)
    {
        double delta = 0;
        int iter1 = 0, iter2 = 0, iter3 = 0;
45        long time = 0;
        Stopwatch stopWatch = new Stopwatch();
        double oldv, psi;
        double au01, au11, au21, au31, au41, au51, au61, au02,
au12, au22, au32, au42, au52, au62;
        int nb; // Номер тела
50        int nt; // Тип узла

```

```

double[,] [, ,] v; // Поле перемещений
double[] t; // Замена переменных нормальная ( компонента)
double[] s; // Замена переменных тангенциальная (
компонента)
55 double[] q; // Двойственная переменная
double[] g; // Сила трения
double lambda, mu; // Параметры Ламе
double [, ,] A; // Массив с коэффициентами

60 v = new double[2][, ,];
v[0] = new double[bSize[0][1]+2, bSize[0][0]+2, 2];
v[1] = new double[bSize[1][1]+2, bSize[1][0]+2, 2];
t = new double[bSize[0][0]+2];
s = new double[bSize[0][0]+2];
65 q = new double[bSize[0][0]+2];
g = new double[bSize[0][0]+2];

mu = E/(2+2*nu);
lambda = nu*E/((1+nu)*(1-2*nu));
70

A = makeATable(lambda, mu);

FindSolution.FindSolutionOutput output = new FindSolution.
FindSolutionOutput(iter1, iter2, iter3, time, v,t,s,q);

75 stopWatch.Reset();
stopWatch.Start();

for (int j = 1; j <= bSize[0][0]; j++)
{
80     g[j] = 100;
}

do
{ // Цикл, в котором меняется сила трения
85     do
    { // Цикл, в котором меняется двойственная переменная
        do
        { // Цикл, в котором вычисляется значение функции
90             if (backgroundWorker != null)
                {
                    if (backgroundWorker.CancellationPending)

```



```

    {
        return null;
    }
95
    if (backgroundWorker.WorkerReportsProgress)
    {
        output = new FindSolution.FindSolutionOutput(
            iter1, iter2, iter3, 0, v, t, s, q);
        backgroundWorker.ReportProgress(50, output);
    }
100
}

delta = 0;
nb = 0;
nt = -1;
105
for (int i=1, ii=1; i<=bSize[0][1]+bSize[1][1]-1; i
++, ii++)
{
    if ((i>bSize[0][1]) && (nb==0))
    { // Переходим к расчету следующего тела
110
        nb++;
        i--;
        ii = 1;
    }
    for (int j=1; j<=bSize[0][0]; j++)
115
    {
        for (int k=0; k<=1; k++)
        {
            oldv = v[nb][ii,j,k]; // Сохраняем текущее
            значение компоненты вектора перемещения в данном узле для
            нахождения delta
120
            if ((nb==0) && (j==bSize[0][0]) && (k==0) && (
                ii<bSize[nb][1])) continue; // Правая стенка верхнего тела не
            перемещается по нормали

            if ((ii>1) && (ii<bSize[nb][1]) && (j>1) && (j
                <bSize[nb][0])) nt = 0;
            else if ((ii==1) && (j==1)) nt = 1;
            else if ((ii==1) && (j>1) && (j<bSize[nb][0]))
                nt = 2;
125
            else if ((ii==1) && (j==bSize[nb][0])) nt = 3;

```

```

else if ((ii> 1) && (ii<bSize[nb][1]) && (j
==1)) nt = 4;
else if ((ii> 1) && (ii<bSize[nb][1]) && (j==
bSize[nb][0])) nt = 5;
else if ((ii==bSize[nb][1]) && (j==1)) nt = 6;
else if ((ii==bSize[nb][1]) && (j>1) && (j<
bSize[nb][0])) nt = 7;
130 else if ((ii==bSize[nb][1]) && (j==bSize[nb
][0])) nt = 8;
else nt = -1;

if ((nt==1) | (nt==3) | (nt==6) | (nt==8)) h=h/2;

135 au01 = A[nt,0,0+k*2] * v[nb][ii,j,0];
au11 = A[nt,1,0+k*2] * v[nb][ii,j+1,0];
au21 = A[nt,2,0+k*2] * v[nb][ii-1,j+1,0];
au31 = A[nt,3,0+k*2] * v[nb][ii-1,j,0];
au41 = A[nt,4,0+k*2] * v[nb][ii,j-1,0];
140 au51 = A[nt,5,0+k*2] * v[nb][ii+1,j-1,0];
au61 = A[nt,6,0+k*2] * v[nb][ii+1,j,0];

au02 = A[nt,0,1+k*2] * v[nb][ii,j,1];
au12 = A[nt,1,1+k*2] * v[nb][ii,j+1,1];
145 au22 = A[nt,2,1+k*2] * v[nb][ii-1,j+1,1];
au32 = A[nt,3,1+k*2] * v[nb][ii-1,j,1];
au42 = A[nt,4,1+k*2] * v[nb][ii,j-1,1];
au52 = A[nt,5,1+k*2] * v[nb][ii+1,j-1,1];
au62 = A[nt,6,1+k*2] * v[nb][ii+1,j,1];

150 if ((i==bSize[0][1]) && (nb==0))
{
if (k==0)
{
155 /* Замена s[j] = -v[0][last_row, j, 0] + v
[1][first_row, j, 0]. Так как s[j] находится в
недифференцируемой части абсолютное ( значение), приходится использо
 проверку условий. При этом ещё происходит замена v[0][last_row,
j, 0] = v[1][first_row, j, 0] - s[j] */

au01 = A[nt,0,0]*v[1][1,j,0]; // значение
в том же узле нижнего тела

```

```

160         psi = FP[nb][ii,j,0] - (au01+au11+au21+
au31+au41+au51+au61 + au02+au12+au22+au32+au42+au52+au62);
        if (psi+h*g[j]<0) s[j] = (-psi-h*g[j]) / A
[nt,0,0];
        else if (psi-h*g[j]>0) s[j] = (-psi+h*g[j
]) / A[nt,0,0];
        else s[j] = 0;

165         v[nb][ii,j,0] = v[1][1,j,0] - s[j];
        }
        if (k==1)
        {
            /* Замена  $t[j] = -v[0][last\_row, j, 1] + v
[1][first\_row, j, 1]$ . Так как  $t[j]$  находится в
недифференцируемой части положительная (срезка), приходится использо
 проверку условий */
170         au02 = A[nt,0,3]*v[1][1,j,1]; //
значение в том же узле нижнего тела

        psi = -(FP[nb][ii,j,1] - (au01+au11+au21+
au31+au41+au51+au61 + au02+au12+au22+au32+au42+au52+au62)) / A[
nt,0,3];
        if ((q[j]+r*psi)<=0)
        t[j] = psi;
175         else t[j] = -(FP[nb][ii,j,1] - (au01+au11+
au21+au31+au41+au51+au61 + au02+au12+au22+au32+au42+au52+au62)
+ h*q[j]) / (A[nt,0,3] + h*r);

        v[nb][ii,j,1] = v[1][1,j,1] - t[j];
        }
        }
180     else if ((i == bSize[0][1]) && (nb == 1))
        {
            au01 = A[nt,0,0+k*2]*v[nb][ii,j,0]
+ A[nt+5,0,0+k*2]*v[0][bSize[0][1],j,0];
            au11 = A[nt,1,0+k*2]*v[nb][ii,j+1,0]
185 + A[nt+5,1,0+k*2]*v[0][bSize[0][1],j+1,0];
            au21 = A[nt+5,2,0+k*2]*v[0][bSize[0][1]-1,j
+1,0];
            au31 = A[nt+5,3,0+k*2]*v[0][bSize[0][1]-1,j
,0];
            au41 = A[nt,4,0+k*2]*v[nb][ii,j-1,0]

```

```

190         + A[nt+5,4,0+k*2]*v[0][bSize[0][1],j-1,0];

        au02 = A[nt,0,1+k*2]*v[nb][ii,j,1]
        + A[nt+5,0,1+k*2]*v[0][bSize[0][1],j,1];
        au12 = A[nt,1,1+k*2]*v[nb][ii,j+1,1]
        + A[nt+5,1,1+k*2]*v[0][bSize[0][1],j+1,1];
195         au22 = A[nt+5,2,1+k*2]*v[0][bSize[0][1]-1,j
+1,1];

        au32 = A[nt+5,3,1+k*2]*v[0][bSize[0][1]-1,j
,1];

        au42 = A[nt,4,1+k*2]*v[nb][ii,j-1,1]
        + A[nt+5,4,1+k*2]*v[0][bSize[0][1],j-1,1];

200         if (k==0)
        {
            /* При осуществления замены  $s[j] = -v[0][$ 
last_row, j, 0] + v[1][first_row, j, 0] происходит и замена  $v$ 
[0][last_row, j, 0] = v[1][first_row, j, 0] - s[j]. Поэтому тангенци
компонента перемещений точек из верхнего слоя нижнего тела зависит
не только от своих соседей, но и от соседей точек нижнего слоя верхн
тела */

            v[nb][ii,j,0] = (FP[nb][ii,j,0] + FP[0][
bSize[0][1],j,0]
205             - (au11+au21+au31+au41+au51+au61 + au02+
au12+au22+au32+au42+au52+au62 - A[nt+5,0,0]*s[j])) / (A[nt,0,0]
+ A[nt+5,0,0]);
        }

        if (k==1)
        {
210            /* При осуществления замены  $t[j] = -v[0][$ 
last_row,j,1] + v[1][first_row,j,1] происходит и замена  $v[0][$ 
last_row,j,1] = v[1][first_row,j,1] - t[j]. Поэтому нормальная комп
перемещений точек из верхнего слоя нижнего тела зависит не только
от своих соседей, но и от соседей точек нижнего слоя верхнего тела
*/

            v[nb][ii,j,1] = (FP[nb][ii,j,1] + FP[0][
bSize[0][1],j,1]
                - (au01+au11+au21+au31+au41+au51+au61 +
au12+au22+au32+au42+au52+au62 - A[nt+5,0,3]*t[j])) / (A[nt,0,3]
+ A[nt+5,0,3]);

```

```

    }
215     }
        else if ((ii==bSize[1][1]) && (nb==1))
        {
        }
        else
220     {
            if (k==0) v[nb][ii,j,0] = (FP[nb][ii,j,0] -
            (au11+au21+au31+au41+au51+au61 + au02+au12+au22+au32+au42+au52+
            au62)) / A[nt,0,0];
            if (k==1) v[nb][ii,j,1] = (FP[nb][ii,j,1] -
            (au01+au11+au21+au31+au41+au51+au61 + au12+au22+au32+au42+au52+
            au62)) / A[nt,0,3];
            }
            delta = Math.Max(delta, Math.Abs(v[nb][ii, j,
225     k] - oldv));

                if ((nt==1) | (nt==3) | (nt==6) | (nt==8)) h=h*2;
            }
        }
    }
230     iter1++;
    }
    while (delta>epsilon*h*0.000001);

    delta=0;
235

    double oldq=0;
    for (int j=1; j<=bSize[0][0]; j++)
    {
        oldq = q[j];
240     q[j] = Math.Max(0, q[j]+r*t[j]);
        delta = Math.Max(delta, Math.Abs(q[j] - oldq));
    }

    iter2++;
245 }
    while (delta>=epsilon);

    double oldg=0;
    for (int j=1; j<=bSize[0][0]; j++)
250 {
        oldg = g[j];

```

```

        g[j] = f * Math.Abs(q[j]);
        delta = Math.Max(delta, Math.Abs(g[j] - oldg));
    }
255
    iter3++;
}
while (delta >= epsilon);

260
stopWatch.Stop();
//time = stopWatch.ElapsedTicks;
time = stopWatch.ElapsedMilliseconds / 1000;

    output = new FindSolution.FindSolutionOutput(iter1, iter2,
265
    iter3, time, v, t, s, q);

    return output;
}

/// <summary>
270
/// Расчет матрицы жесткости
/// </summary>
/// <param name="lambdaПараметр"> Ламе lambda</param>
/// <param name="muПараметр"> Ламе mu</param>
private static double[, ,] makeATable(double lambda, double
mu)
275
{
    double[, ,] tI = new double[4, 6, 7]{
        {
            {+0.5, -0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
            {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
280
            {+0.5, +0.0, +0.0, +0.0, -0.5, +0.0, +0.0},
            {+0.5, +0.0, +0.0, +0.0, -0.5, +0.0, +0.0},
            {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
            {+0.5, -0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0}
        },
285
        {
            {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
            {+0.5, +0.0, +0.0, -0.5, +0.0, +0.0, +0.0},
            {+0.5, +0.0, +0.0, -0.5, +0.0, +0.0, +0.0},
            {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
290
            {+0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, -0.5},
            {+0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, -0.5}
        },
    },

```

```

295     {
        {+0.0, +0.5, -0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
        {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
        {-0.5, +0.0, +0.0, +0.5, +0.0, +0.0, +0.0},
        {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.5, -0.5, +0.0},
        {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
        {-0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.5}
300     },
        {
        {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
        {+0.0, +0.0, -0.5, +0.5, +0.0, +0.0, +0.0},
        {-0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.5, +0.0, +0.0},
305        {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0},
        {+0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, -0.5, +0.5},
        {-0.5, +0.5, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0, +0.0}
        }
    }
};

310 double[, ,] tC = new double[9, 7, 4];
    for (int i = 0; i <= 6; i++)
    {
        for (int j = 0; j <= 3; j++)
        {
315            tC[0,i,j] = tI[j,0,i] + tI[j,1,i] + tI[j,2,i] + tI[j
,3,i] + tI[j,4,i] + tI[j,5,i]; // Нулевого типа пересекается
со всеми, тут верно
            tC[1,i,j] = tI[j,5,i];
            tC[2,i,j] = tI[j,3,i] + tI[j,4,i] + tI[j,5,i];
            tC[3,i,j] = tI[j,3,i] + tI[j,4,i];
            tC[4,i,j] = tI[j,0,i] + tI[j,1,i] + tI[j,5,i];
320            tC[5,i,j] = tI[j,2,i] + tI[j,3,i] + tI[j,4,i];
            tC[6,i,j] = tI[j,0,i] + tI[j,1,i];
            tC[7,i,j] = tI[j,0,i] + tI[j,1,i] + tI[j,2,i];
            tC[8,i,j] = tI[j,2,i];
        }
325    }

    double[, ,] tA = new double[12, 7, 4];
    for (int i = 0; i <= 8; i++)
    {
330        for (int j = 0; j <= 6; j++)
        {
            // Коэффициенты при x1 и x2 при расчете компоненты x1

```

```

    tA[i,j,0] = (2*mu+lambda)*tC[i,j,0] + mu*tC[i,j,1] /
2;
    tA[i,j,1] = lambda*tC[i,j,2] + mu*tC[i,j,3] / 2;
335 // Коэффициенты при x1 и x2 при расчете компоненты x2
    tA[i,j,2] = mu*tC[i,j,2]/2 + lambda*tC[i,j,3];
    tA[i,j,3] = mu*tC[i,j,0]/2 + (2*mu+lambda)*tC[i,j,1];
    }
    }
340 return tA;
    }
}
}

```

А.4 Задача о теле с дефектом

В листинге А.4 приведена часть программы, отвечающая за минимизацию целевой функции с помощью обобщенного метода Ньютона, описанного в разделе 4.5. Программа реализована на языке программирования C++ с использованием программно-аппаратной архитектуры параллельных вычислений CUDA.

Листинг А.4: Обобщенный метод Ньютона

```

int argminMNewton(ProblemSetting problem, FiniteProblemSetting
    problemFEM, double * muNu, double * v, double * t, double * s,
    double * A, double * F, double r, DebugSetting debug)
{
    double param = problem.damageParameter;
    double mu = problem.mu;
5    double lambda = problem.lambda;

    int n = problemFEM.n;
    double h = problemFEM.h;
    long long nFE = problemFEM.nFE;
10    long long nFE2 = problemFEM.nFE2;
    int nw = problemFEM.n;
    int nh1 = problemFEM.nh1;
    int nh2 = problemFEM.nh2;
    int ct1 = problemFEM.ct1;
15    int ct2 = problemFEM.ct2;
    int cty = problemFEM.cty;
}

```



```

int iA, jA;
int ix, iy;
20 int nb;
int k;
int nt = -1;
int iA0, iA1

25 double delta = 0;

int iter1 = 0;

for (iA = 0; iA < nFE2; iA++)
30 {
    v2[iA] = 0;
    hlrt[iA] = 0;
}

35 do
{
    iter1++;

    for (iA = 0; iA < nFE2; iA++)
40 vOld[iA] = v[iA];

    for (int ix = ct1 + 1; ix < ct2; ix++)
    {
        hlrt[0 * nFE + nw * nh1 + ix] = s[ix] * h / param;
45 hlrt[0 * nFE + nw * cty + ix] = -s[ix] * h / param;

        hlrt[1 * nFE + nw * nh1 + ix] = t[ix] * h / param - h * (((
muNu[ix] - r * t[ix]) > 0) ? (muNu[ix] - r * t[ix]) : 0);
        hlrt[1 * nFE + nw * cty + ix] = -t[ix] * h / param + h * (((
muNu[ix] - r * t[ix]) > 0) ? (muNu[ix] - r * t[ix]) : 0);
50 }

    for (int k = 0; k <= 1; k++)
    {
55     for (int nb = 0; nb <= 1; nb++)
        {
            int nh = (!nb ? nh1 : nh2);

```

```

        for (int iy = 0; iy < nh; iy++)
        {
60         for (int ix = 0; ix < nw; ix++)
            {
                int index = k * nFE + nb * nw * nh1 + iy * nw + ix;
                v2[index] = hlrt[index] - F[index];
            }
65     }
    }

    cudaMemcpy(d_Vector1copy, v, nFE2 * sizeof(double),
cudaMemcpyHostToDevice);
70     cudaMemcpy(d_Vector2grad, v2, nFE2 * sizeof(double),
cudaMemcpyHostToDevice);
    cublasDgemv(handle, CUBLAS_OP_N, nFE2, nFE2, ONE, d_MatrixA,
nFE2, d_Vector1, 1, ONE, d_Vector2grad, 1);

    for (iA = 0; iA < nFE2; iA++)
        for (jA = 0; jA < nFE2; jA++)
75         Hessian[IDX2C(iA, jA, nFE2)] = A[IDX2C(iA, jA, nFE2)];

    for (int ix = ct1 + 1; ix < ct2; ix++)
    {
        int index, jindex;
80         index = 0 * nFE + nw * nh1 + ix;
        jindex = 0 * nFE + nw * cty + ix;

        Hessian[IDX2C(index, index, nFE2)] += h / param;
        Hessian[IDX2C(jindex, jindex, nFE2)] += h / param;
85         Hessian[IDX2C(jindex, index, nFE2)] -= h / param;
        Hessian[IDX2C(index, jindex, nFE2)] -= h / param;

        index = 1 * nFE + nw * nh1 + ix;
        jindex = 1 * nFE + nw * cty + ix;
90

        Hessian[IDX2C(index, index, nFE2)] += h / param;
        Hessian[IDX2C(jindex, jindex, nFE2)] += h / param;
        Hessian[IDX2C(jindex, index, nFE2)] -= h / param;
        Hessian[IDX2C(index, jindex, nFE2)] -= h / param;
95

        Hessian[IDX2C(index, index, nFE2)] += ((muNu[ix] - r * t[ix
]) > 0) ? r * h : 0);

```

```

        Hessian[IDX2C(jindex, jindex, nFE2)] += ((muNu[ix] - r * t[ix
100    ]) > 0) ? r * h : 0);
        Hessian[IDX2C(jindex, index, nFE2)] -= ((muNu[ix] - r * t[ix
        Hessian[IDX2C(index, jindex, nFE2)] -= ((muNu[ix] - r * t[ix
105    ]) > 0) ? r * h : 0);

    }

    cudaMemcpy(d_MatrixHesse, Hessian, nFE2 * nFE2 * sizeof(double
), cudaMemcpyHostToDevice);

    cublasDgetrfBatched(handle, nFE2, d_inout_pointers, nFE2,
110    d_PivotArray, d_InfoArray, 1);
    cublasDgetriBatched(handle, nFE2, (const double **)
d_inout_pointers, nFE2, (const int *)d_PivotArray,
d_out_pointers, nFE2, d_InfoArray, 1);

    cublasDgemv(handle, CUBLAS_OP_N, nFE2, nFE2, MINUSONE,
d_MatrixHesseInv, nFE2, d_Vector2grad, 1, ZERO, d_Vector3dir,
1);

    double alpha = 1.0;
    double oldFunctionValue, newFunctionValue, gradDotDirection;
    oldFunctionValue = functionValue(n, ct1, ct2, param, muNu, t,
115    s, F, d_Vector1copy, r);
    if (oldFunctionValue == 0) oldFunctionValue = 999999999;
    cublasDdot(handle, nFE2, d_Vector3dir, 1, d_Vector2grad, 1, &
gradDotDirection);

    do
    {
        cudaMemcpy(d_Vector1, d_Vector1copy, nFE2 * sizeof(double),
120    cudaMemcpyDeviceToDevice);

        cublasDaxpy(handle, nFE2, &alpha, d_Vector3dir, 1, d_Vector1
, 1);

        cudaError_t err = cudaMemcpy(v, (const void *)d_Vector1,
nFE2 * sizeof(double), cudaMemcpyDeviceToHost);
        for (int ix = ct1 + 1; ix < ct2; ix++)
        {

```

```

125         s[ix] = v[0 * nFE + nw * nh1 + ix] - v[0 * nFE + nw * cty
+ ix];
        t[ix] = v[1 * nFE + nw * nh1 + ix] - v[1 * nFE + nw * cty
+ ix];
    }

    newFunctionValue = functionValue(n, ct1, ct2, param, muNu, t
, s, F, d_Vector1, r);
130
    alpha /= 1.01;
    } while (newFunctionValue > oldFunctionValue + 0.5 * (1.01 *
alpha) * gradDotDirection);

    for (iA = 0; iA < nFE2; iA++)
135     vOld[iA] = v[iA] - vOld[iA];

    delta =
    (norm(n, ct1, ct2, cty, mu, lambda, vOld, 0) + norm(n, ct1,
ct2, cty, mu, lambda, vOld, 1)) /
    (norm(n, ct1, ct2, cty, mu, lambda, v, 0) + norm(n, ct1, ct2,
cty, mu, lambda, v, 1));
140
    } while (delta > 1e-7);

    return iter1;
}
145
long double functionValue(int n, int ct1, int ct2, double param,
    double * muNu, double * t, double * s, double * F, double * d_v
, double r)
{
    double h = 1.0 / (n - 1);
    long long nFE = n * n + n;
150    long long nFE2 = 2 * nFE;

    long double value = 0;

    double *d_tempVector;
155    cudaMalloc((void**)&d_tempVector, nFE2 * sizeof(double));

    cudaMemcpy(d_tempVector, F, nFE2 * sizeof(double),
    cudaMemcpyHostToDevice);

```

```
cublasDgemv(handle, CUBLAS_OP_N, nFE2, nFE2, ONEHALF, d_MatrixA,
    nFE2, d_v, 1, MINUSONE, d_tempVector, 1);
double* AvvFv = new double(0);
160 cublasDdot(handle, nFE2, d_tempVector, 1, d_v, 1, AvvFv);
    value = *AvvFv;

    cudaFree(d_tempVector);
    delete AvvFv;
165
    long double st = 0;
    for (int ix = ct1 + 1; ix < ct2; ix++)
        st += s[ix] * s[ix] + t[ix] * t[ix];
    st = st / param;
170 long double lrt = 0;
    for (int ix = ct1 + 1; ix < ct2; ix++)
        lrt += pow( std::max(0.0, (muNu[ix] - r * t[ix])), 2) - muNu[ix]
            * muNu[ix];
    lrt = lrt / r;

175 value += (st + lrt) * h / 2;

    return value;
}
```