

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки**  
**ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ**  
Дальневосточного отделения Российской академии наук  
(ИАПУ ДВО РАН)

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИАПУ ДВО РАН,  
д-р физ.-мат. наук,  
член-корреспондент РАН  
Р.В. Ромашко  
«25» марта 2024 г.



**ОТЗЫВ**

ведущей организации Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт автоматике и процессов управления» Дальневосточного отделения Российской академии наук (ФГБУН ИАПУ ДВО РАН) на диссертационную работу **Жильцова Александра Владимировича** «Оптимизационные алгоритмы с модифицированными функционалами Лагранжа для решения контактных задач механики», представленную к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

В ИАПУ ДВО РАН представлена диссертация А.В. Жильцова, изложенная на 141 страницах машинописного текста, состоящая из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы в 110 наименований (из них 24 на иностранном языке и 17 собственные публикации), приложения, и автореферат диссертации.

**Актуальность темы исследования**

Диссертационная работа Жильцова Александра Владимировича посвящена развитию теории модифицированных функционалов Лагранжа применительно к исследованию контактных задач теории упругости, допускающих вариационную постановку.

В современной индустрии широко применяются композитные материалы. Однако при эксплуатации этих материалов возникает проблема отслаивания армирующего наполнителя от упругой матрицы, что может привести к появлению трещин и других дефектов, негативно влияющих на целевые характеристики. Для определения максимальных нагрузок, прогнозирования срока службы и изучения поведения композитных материалов необходимо разрабатывать и исследовать их модели. В данной диссертационной работе представлены простейшие нелинейные модели, описывающие напряженно-деформированное состояние твердых тел. Тем не менее, разработка эффективных численных алгоритмов для их решения является основой для изучения более сложных, реальных задач.

Математические модели для решения прикладных задач могут быть представлены в нескольких формах: краевые задачи, вариационные неравенства и вариационные постановки. В случае вариационной постановки основной задачей является поиск экстремума функционала потенциальной энергии на ограниченном множестве исходных функций-решений. Для поиска решения экстремальных задач используются различные оптимизационные алгоритмы, включая двойственный подход или метод множителей Лагранжа. При использовании методов двойственности задача сводится к поиску седловой точки функции Лагранжа. Алгоритм решения состоит из двух этапов: минимизации по прямой переменной и максимизации по двойственной переменной функции Лагранжа (также известный как алгоритм Удзавы).

На данный момент в исследованиях, связанных с применением методов двойственности для решения вариационных и квазивариационных задач, чаще всего применяется классический подход. Однако схемы двойственности, использующие классический функционал Лагранжа, имеют некоторые недостатки и имеют меньшую вычислительную эффективность по сравнению с модифицированными схемами двойственности, где применяется так называемый модифицированный функционал Лагранжа.

При исследовании многих задач механики часто используется численный метод конечных элементов. Этот метод позволяет аппроксимировать математические постановки в виде вариационной задачи и сводить их к конечномерным задачам. В данной диссертации для решения каждой из исследуемых задач применяется конечномерная аппроксимация соответствующих функционалов Лагранжа. Затем, чтобы решить полученные

конечномерные оптимизационные задачи на каждом шаге алгоритма Удзавы, используются эффективные алгоритмы безусловной минимизации.

### **Общая характеристика работы**

Диссертационное исследование посвящено решению актуальной научно-практической задачи, заключающейся в разработке эффективных алгоритмов, базирующихся на комбинации схем двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа, конечно-элементной аппроксимации и численных методов безусловной минимизации приводит, для исследования прикладных вариационных задач в области механики. Это представляет интерес как с точки зрения фундаментальных научных исследований, так и с точки зрения практических применений.

**Во введении** к диссертационной работе обобщен опыт и обоснованы направления исследований.

Приведена история развития теории вариационных неравенств и методы их решения, история. Обоснованы предпосылки к применению двойственного подхода (метода множителей Лагранжа) для исследования контактных задач механики, представимых в виде вариационных постановок. Представлены разъяснения наибольшей эффективности модифицированных функционалов Лагранжа по сравнению с классическим подходом в рамках теоретической сходимости и при численных расчетах. Имеется литературный обзор современных работ, в которых отражен опыт применения данной схемы к решению задач подобного рода.

Проведенный литературный обзор подтвердил необходимость дальнейшего развития оптимизационного подхода с модифицированными функциями Лагранжа для исследования нелинейных вариационных задач, в частности, для решения контактных задач механики, и построению численных схем с одновременной конечно-элементной аппроксимацией и комбинацией с эффективными численными алгоритмами безусловной оптимизации.

**В первой главе** представлено описание метода множителей Лагранжа для решения задач выпуклого программирования в конечномерном пространстве. Алгоритмы, основанные на классических функциях Лагранжа, имеют медленную сходимость и требуют строгих условий выпуклости и дифференцируемости входящих функций для обоснования их теоретической

сходимости. Однако, изучение модифицированных функций Лагранжа позволяет разработать новый класс методов, где указанные недостатки проявляются в меньшей степени. В этой части работы обосновано применение функции Лагранжа для задач, в которых целевая функция является выпуклой, но не обязательно сильно выпуклой. Показано, что функция чувствительности при этом является лишь полунепрерывной снизу. На примере задачи Синьорини рассмотрено применение схемы двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа: осуществлена аппроксимация задачи по методу конечных элементов, реализован алгоритм Уздавы поиска седловой точки, реализована модификация метода поточечной релаксации на первом шаге алгоритма Уздавы, проведены серии вычислительных экспериментов с целью демонстрации работы алгоритма.

**Во второй главе** представлена схема двойственности с модифицированными функционалами Лагранжа для решения задачи бесконечномерного выпуклого программирования с нелинейными краевыми условиями — модельной задачи теории упругости с трещиной. Проведены теоретические исследования, обоснованы основные свойства функционал Лагранжа. Осуществлена конечно-элементная аппроксимация задачи, реализован алгоритм Уздавы, проведены вычислительные эксперименты. Исследовано поведение расчетной области при различных параметрах задачи, а также скорость сходимости итерационного процесса при вариациях параметра двойственности.

**В третьей главе** исследуется применение модифицированных функционалов Лагранжа для решения задачи о контакте двух тел. Эта задача является задачей в перемещениях и с коэффициентами, учитывающими физические характеристики материалов тел. При решении таких задач используются разные итерационные алгоритмы, но обычно рассматривается коэрцитивный случай, когда оба тела закреплены на части границы. В данном же исследовании рассмотрена более сложная постановка, когда система тел имеет одну степень свободы. Для такого случая нельзя доказать сходимость классических методов двойственности к седловой точке. Однако при модифицированной схеме двойственности можно теоретически обосновать сходимость.

В данном разделе изучены свойства функционала чувствительности, построена и исследована схема двойственности с одновременной итеративной проксимальной регуляризацией функционала Лагранжа. Далее построен метод последовательных приближений для решения квазивариационного неравенства, соответствующего контактной задаче с учетом трения. Проведены вычислительные эксперименты при конечно-элементной аппроксимации задач. Исследован характер взаимодействия тел при различных условиях задачи.

**В четвертой главе** исследуется задача о двумерном теле с дефектом, свойства которого характеризуются параметром разрушения. Данная задача является задачей в перемещениях, с коэффициентами, учитывающими физические характеристики материалов тел. Построена модифицированная схема двойственности и алгоритм Удзавы поиска седловой точки. Осуществлена дискретизация задачи по методу конечных элементов и доказана его сходимости, получены оценки точности аппроксимации. Проведены серии вычислительных экспериментов, исследовано поведение трещины материала при различных вариантах задания нагрузки, осуществлена оценка скорости сходимости метода при вариации параметра разрушения.

**В приложении** представлены коды вычислительных программ, в которых реализованы используемые алгоритмы для решения поставленных задач, на языках программирования C# и C++ с использованием программно-аппаратной архитектуры параллельных вычислений CUDA.

**Научная новизна** заключается в обосновании применимости методов двойственности с модифицированными функционалами Лагранжа к исследованию контактных задач механики (модельная задача с трещиной, полукоэрцитивная задача контакта двух тел, задача о теле с дефектом с параметром разрушения), доказательстве теоретической сходимости, построении эффективных вычислительных схем при конечно-элементной аппроксимации. Для подтверждения полученных теоретических результатов проведены вычислительные эксперименты для каждой из исследуемых задач.

**Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций** подтверждаются корректностью постановок представленных в работе моделей и математических методов их исследования, строгостью и

математических рассуждений при доказательстве основных утверждений, применением апробированных численных методов.

**Научное значение работы** заключается в теоретическом обосновании применимости методов двойственности с модифицированными функционалами Лагранжа к исследованию рассмотренных в работе контактных задач механики, обоснованию сходимости метода конечных элементов при решении конкретных задач, построению и реализации эффективных вычислительных алгоритмов для исследования моделей. В данных аспектах заключается фундаментальный характер полученных в работе научных результатов.

**Практическая значимость результатов диссертационной работы** заключается в том, что построенные алгоритмы и их реализации на языке программирования C# или C++ для каждой задачи можно использовать при исследовании более сложных прикладных проблем.

**О стиле и языке диссертации и автореферата. Соответствие автореферата основным положениям диссертации**

Диссертационная работа написана грамотным языком, оформлена в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.11-2011 «Диссертация и автореферат диссертации. Структура и правила оформления» и Положения о присуждении ученых степеней (утверждено постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. № 842). Автор использует общепринятую научную терминологию, что делает работу доступной для восприятия специалистами. Выводы по работе изложены четко и лаконично. Структура и содержание автореферата соответствуют основным положениям диссертационной работы.

Представленная диссертация может быть квалифицирована как самостоятельное законченное научно-квалификационное исследование, соответствующее паспорту специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

**Рекомендации по использованию результатов и выводов диссертации**

Результаты диссертационной работы могут быть использованы научными организациями при исследовании математических моделей прикладных задач, допускающих вариационную постановку (применение схемы двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа, реализация вычислительных

алгоритмов). Результаты проведенного научного исследования будут полезны в педагогической деятельности при изучении студентами магистратуры или аспирантами дисциплин в области математического моделирования.

### Замечания по диссертации и автореферату

1. При построении схем двойственности записывается обычный классический функционал Лагранжа, а не его обобщенный вариант. Это имеет место на стр. 13 для конечномерной оптимизационной задачи (гл. 1) и в главах 2-4 при исследовании бесконечномерных задач.

Так, например, для задачи, исследуемой во второй главе, Лагранжиан представлен в виде (стр. 29)  $L(v, l) = J(v) - \int_{\Gamma} l[v] ds$ . Хотя, согласно общепринятой методике, требуется сначала записать обобщенный функционал Лагранжа в виде  $L(v, l) = l_0 J(v) - \int_{\Gamma} l[v] ds$ , обосновать регулярность множителей Лагранжа и затем проводить исследование при  $l_0 = 1$ .

2. Некоторое подозрение вызывает факт, что в качестве критерия останова итерационного процесса для алгоритма Удзавы выбрано условие малости двойственных переменных (стр. 24, гл. 1 для конечномерной задачи; стр. 45, гл. 2 для модельной задачи теории упругости с трещиной; стр. 75, гл. 3 для задачи о контакте двух тел; стр. 94, гл. 4 для задачи о теле, содержащем тонкий дефект с параметром). Исходя из каких соображений выбирается такой критерий? Будет ли это условие гарантировать малость отклонения от решения?

3. Возвращаясь к критерию останова: в разных главах используются различные условия остановки внешнего итерационного процесса. Так, в гл. 1 и гл. 2 в условии содержится шаг аппроксимации, в гл. 3 и гл. 4 – отсутствует.

4. Имеются разные обозначения для прямой и двойственной переменных в конечномерных вариантах задач. Так, в гл. 2 и гл. 3 они обозначены через  $u_i, l_i$ , в гл. 4 –  $t_i, \alpha_i$ .

5. Возникают вопросы. Какие задачи можно решить только вашим методом и нельзя решать никакими другими методами? Какими другими методами можно решать исследуемые задачи? В чем преимущество двойственного подхода с модифицированным функционалом Лагранжа для решения вариационных задач с ограничениями в виде неравенств?

## **Заключение по работе**

Диссертация Жильцова Александра Владимировича «Оптимизационные алгоритмы с модифицированными функционалами Лагранжа для решения контактных задач механики» представляет собой законченную научно-квалификационную работу, выполненную на актуальную тему. Полученные на основе проведенных исследований научные результаты имеют важное значение при развитии методов и численных алгоритмов решения вариационных задач с ограничениями в виде неравенств.

Отмеченные замечания не снижают общей положительной оценки работы. Диссертационная работа Жильцова А.В. показывает достаточно высокую эрудицию автора, его способность ставить и исследовать сложные научные задачи, скрупулезность и добросовестность при проведении научных исследований.

Результаты выполненных автором исследований прошли научную апробацию. По теме диссертации опубликовано 12 научных работ, из них 5 статей – в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России; получено 5 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ. Результаты работы обсуждались на научных мероприятиях различного уровня, а также представлены на конкурсах молодых ученых Хабаровского края.

Автореферат диссертации отражает основное содержание работы, а также научные результаты и положения, выносимые на защиту.

Тематика и результаты выполненных исследований соответствуют паспорту специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

В целом представленная диссертационная работа соответствует требованиям, установленным пп. 9-14 Положения о порядке присуждения ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. № 842, а ее автор, Жильцов Александр Владимирович, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Диссертация и отзыв на нее рассмотрены на объединенном заседании лаборатории нелинейной динамики деформирования и междисциплинарного семинара «Физика и управление», протокол № 2/24 от 21.03.2024.

Отзыв подготовлен главным научным сотрудником лаборатории прецизионных оптических измерений ИАПУ ДВО РАН, доктором технических наук, профессором по специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», Девятисильным Александром Сергеевичем.

Главный научный сотрудник  
лаборатории прецизионных  
оптических методов измерений  
ИАПУ ДВО РАН,  
доктор технических наук, профессор

*Девятисильный Александр Сергеевич*



Девятисильный  
Александр Сергеевич

Начальник отдела кадров  
Бутова И.В.

"15" марта 20 24 г.

### Сведения о ведущей организации

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт автоматизации и процессов управления» Дальневосточного отделения Российской академии наук (ФГБУН ИАПУ ДВО РАН).

Почтовый адрес: 690041 г. Владивосток, ул. Радио 5

Телефон: +7 (423) 231-04-39

E-mail: [director@iacp.dvo.ru](mailto:director@iacp.dvo.ru)

Официальный сайт: <https://iacp.dvo.ru/>